

Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica

Maria G. Bartolini Bussi

Mara Boni

Franca Ferri

Rapporto tecnico N° 21

Nucleo di ricerca in Storia e Didattica della Matematica

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

Università degli Studi di Modena

CENTRODOCUMENTAZIONEEDUCATIVA

Comune di Modena

Settore Istruzione

Ogni materia scolastica ha una sua propria relazione con il corso dello sviluppo del bambino, relazione che muta con il passaggio del bambino da uno stadio all'altro. Ciò comporta il riesame dell'intero problema delle discipline formali, cioè del ruolo e dell'importanza delle singole materie nel successivo sviluppo psico-intellettivo del bambino. Tale questione non può essere schematizzata in una qualunque formula unica, ma permette piuttosto di capire quanto vasti siano gli obiettivi di una ricerca sperimentale estensiva e variata.

(L. S. Vygotskij)

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1: Discussione Matematica	3
1. Alcuni riferimenti nella letteratura	3
2. Critica	5
3. Quadro di riferimento	6
4. Una concezione Vygotskiana (e Bachtiniana) di discussione	6
5. La discussione dell'intera classe orchestrata dall'insegnante	10
6. I diversi tipi di discussione	10
7. Un primo modello: discussioni di bilancio	11
8. Un secondo modello: discussioni di concettualizzazione	12
9. Prime conclusioni	13
9.1. Discussione di soluzione	15
9.2. Discussione di concettualizzazione iniziale	15
9.3. Metadiscussione	15
9.4. L'interpretazione di fonti esterni	16
9.5. Problemi aperti	16
10. Modellizzazione: il livello (attività -) azioni - operazioni	16
10.1. Analisi a priori e analisi a posteriori	16
10.2. L'approccio interpretativista	17

11. Analisi di alcune intenzioni particolari	19
11.1. Il linguaggio come strumento del pensiero	19
11.2. La cultura del progresso scientifico come costruzione sociale	20
11.3. Il genere di discorso dell'istituzione scolastica	20
12. Il ruolo dell'insegnante nelle singole fasi di una discussione di bilancio	21
13. Il ruolo dell'insegnante nelle singole fasi di una discussione di concettualizzazione	23
14. L'analisi fine della discussione	24
14.1. Generalità	24
14.2. Guida operativa	27
15. La metodologia della ricerca	27
Capitolo 2: Esperimenti didattici	29
1. Gli esperimenti didattici	29
1.1. Introduzione	29
1.2. L'esperimento sull'infinito	29
1.3. L'esperimento sul volume	30
1.4. L'esperimento sui grafici nel piano cartesiano	31
1.5. Analisi retrospettiva dei primi esperimenti	31
2. Il coordinamento dei punti di vista nel primo ciclo della scuola elementare (scritto in collaborazione con Mara Boni)	33
2.1. Introduzione	33
2.2. Analisi delle fasi del percorso	34
2.2.1. Dettatura del paesaggio	36
2.2.2. Discussione del paesaggio	36
2.2.3. Disegno del paesaggio	36
2.2.4. Discussione del disegno	37
2.2.5. Copia dal vero	38
2.2.6. Copia dal vero con verbalizzazione	38
2.2.7. Discussione: che cosa vuol dire punto di vista?	38
2.2.8. Spiega: che cosa vuol dire punto di vista?	39
2.2.9. Dalla visuale all'osservatore	40
2.2.10. La visuale della maestra	40
2.2.11. Copia dal vero: cubo	40
2.2.12. Discussione di bilancio	40
2.2.13. Disegno a memoria del cubo	41
2.2.14. Copia dal vero: banco	42
2.2.15. Discussione del disegno	43
2.2.16. Copia dal vero: sedia	43
2.2.17. Il nascondino	44
2.2.18. Copia dal vero: il giardino	44

3. Rappresentazione del mondo visibile attraverso il disegno geometrico in prospettiva nel secondo ciclo della scuola elementare. (scritto in collaborazione con Franca Ferri)	48
3.1. Introduzione	48
3.2. Analisi delle fasi del percorso -	50
3.2.1. Il tavolo e la pallina	50
3.2.2. Discussione (soluzione empirica)	50
3.2.3. Rappresentazione geometrica di spazi esperienziali	51
3.2.4. Invarianti nel disegno in prospettiva	51
3.2.5. Il disegno del mesospazio	51
3.2.6. Discussione di bilancio	52
3.2.7. Piero della Francesca	52
3.2.8. Che cosa ho capito?	52
3.2.9. Il tavolo e la tovaglia	52
3.2.10. Discussione: qual è la forma del tavolo	53
3.2.11. Il pavimento rettangolare	53
3.2.12. Il metodo di Pélerin	53
3.2.13. Lo spazio prima degli oggetti	54
3.2.14. Problemi supplementari	54
3.3. Tavole supplementari	54
4. Alcuni sviluppi	75
4.1. Verso la dimostrazione	75
4.2. Il prospettografo	75
4.3. Il mondo esterno	76
5. La prospettiva per gli insegnanti	76
6. Alcuni problemi operativi	82
6.1. Quando la classe non risponde come ci si aspetta	82
6.2. Quando l'insegnante non approfitta delle occasioni	82
6.3. La storia della classe	82
6.4. L'osservazione dei processi individuali degli allievi	82
Capitolo 3: Antologia	83
Attività - azioni - operazioni (Leont'ev)	84
Campo visivo interno (Vygotskij)	88
Concetti quotidiani e concetti scientifici (Vygotskij)	89
Conoscenza empirica - conoscenza teorica (Davydov)	91
Coscienza (Vygotskij)	92
Cultura (scuola di Tartu)	94
Genere di discorso (Bachtin)	95
Interiorizzazione (Vygotskij)	96
Matematizzato - matematica (Raymond)	98
Mediazione semiotica (Vygotskij)	100
Micro-spazio - meso-spazio - macro-spazio (Galvez)	101
Ostacolo epistemologico (Bachelard)	103
Senso personale - significato (Leont'ev)	104

Significato - senso - riferimento all'oggetto (Vygotskij)	107
Significato - tema (Bachtin)	108
Strumento - oggetto - quadro (Douady)	109
Voce (Bachtin)	110
Zona di sviluppo prossimale / area di sviluppo potenziale (Vygotskij)	111
Capitolo 4: Bibliografie	113
1. Pubblicazioni del progetto Discussione Matematica	113
2. Bibliografia generale	118

Introduzione

Questo libretto racconta la storia di una avventura che coinvolge da molti anni un gruppo di insegnanti elementari, le loro classi e un docente dell'università che si occupa professionalmente di ricerca in didattica della matematica. È la storia di una attività, nata dal bisogno di razionalizzare il funzionamento dei momenti collettivi della vita della classe e di orientarli intenzionalmente verso la costruzione del sapere. È la storia di un processo collettivo di appropriazione e di condivisione di elementi di conoscenza dai campi della matematica, della psicologia, della pedagogia, della didattica, ecc. possibile per la presenza di competenze diverse nel gruppo di ricerca. È la storia di una ricerca didattica sull'interazione sociale nel processo di insegnamento - apprendimento della matematica, che ha prodotto risultati nella forma di percorsi didattici e di modelli di funzionamento di particolari forme di interazione nella classe e ha prodotto problemi di ricerca, inserendosi con tutto rispetto nella letteratura nazionale ed internazionale. È la storia della costruzione collettiva di un modello di insegnante che è anche ricercatore nella sua classe e si confronta su un piano paritetico con altri ricercatori italiani e stranieri.

Questa pubblicazione ha lo scopo di fornire una introduzione alle problematiche, al quadro di riferimento e ai risultati della nostra ricerca sulla discussione matematica: al primo capitolo di introduzione generale, seguirà un capitolo in cui sono descritti due esperimenti didattici sulla rappresentazione dello spazio, già pubblicati su prestigiose riviste straniere, ma non ancora pubblicati in italiano; nel terzo capitolo è proposta una antologia per voci ordinate alfabeticamente, tratte da alcuni autori che sono stati fondamentali nella costruzione del quadro di riferimento teorico (i riferimenti alle voci dell'antologia in tutto il testo sono preceduti da #, es. # INTERIORIZZAZIONE), è poi presentata una bibliografia ragionata di tutte le pubblicazioni del nostro gruppo sul tema. La bibliografia finale che colloca il nostro lavoro nel quadro della ricerca internazionale contiene solo i riferimenti minimi: abbiamo pensato che, in un lavoro destinato alla divulgazione, una lista di riferimenti difficilmente reperibili al di fuori delle biblioteche specializzate e sempre scritti in una lingua straniera, avrebbe provocato frustrazione piuttosto che desiderio di approfondimento. Il carattere introduttivo di questo libretto rende necessaria la lettura degli articoli contenuti nella bibliografia ragionata per chi volesse affrontare i problemi della ricerca.

Il contenuto di questo lavoro è il risultato di una polifonia di voci, provenienti dagli allievi delle classi sperimentali, dai membri del gruppo di ricerca, dagli altri ricercatori italiani e stranieri che hanno discusso con noi, dai testi di autori lontani da noi nel tempo e nello spazio. Le voci sono fisicamente pronunciate da Mariolina Bartolini Bussi, che ha avuto fino dall'inizio la responsabilità scientifica del progetto, da Franca Ferri e Mara Boni, che hanno condotto gli esperimenti, coordinando l'attività di colleghi di classi parallele ed assumendosi la responsabilità di comunicazioni ad importanti congressi nazionali ed internazionali.

Questo lavoro è stato reso possibile dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, che ha finanziato dal 1987 a tutt'oggi questo progetto, consentendo, tra l'altro, la partecipazione dei membri del gruppo di ricerca agli incontri annuali tra i Nuclei di Ricerca Didattica per la Scuola Elementare e per la Scuola Media ed a importanti congressi nazionali ed internazionali e rompendo l'isolamento in cui vivono nella scuola le voci fuori dal coro.

L'organizzazione locale dell'attività è stata curata dal Centro Documentazione Educativa del Comune di Modena, nell'ambito di una Convenzione sull'aggiornamento degli insegnanti stipulata tra il Comune di Modena e il Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università degli Studi di Modena.

Il gruppo di ricerca sulla discussione matematica risulta attualmente costituito dalle insegnanti di scuola elementare:

Stefania Anderlini, Bianca Betti, Mara Boni, Maria Franca Ferraroni, Franca Ferri, Cinzia Fortini, Marialaura Lapucci, Federica Monari, Anna Mucci

e dalle insegnanti di scuola media:

Claudia Costa, Rossella Garuti.

Nel corso del tempo hanno partecipato attivamente alla ricerca sulla discussione matematica anche gli insegnanti elementari:

Lucia Davoli, Luisa Fiori, Tiziana Garuti, Mariella Iannicelli, Simonetta Lombardini, Marta Malvezzi, Filomena Natalini, Carla Ronchetti, Renzo Tonolo, Silvia Salvini, Mariapia Turchi.

A tutti loro va il nostro ringraziamento.

Capitolo 1

Discussione Matematica

1. Alcuni riferimenti nella letteratura.

Il termine *discussione matematica* è stato introdotto formalmente nella ricerca didattica da Pirie & Schwarzenberger (1988), come *discorso mirato su un argomento di matematica in cui ci sono contributi originali degli allievi ed interazione*. Ogni parte di questa definizione è dagli autori finalizzata ad uno scopo specifico, per distinguere una discussione matematica da altri generi di discorso di classe come una chiacchierata a scopo sociale (finalizzata allo 'star bene a scuola') o su argomenti qualsiasi o caratterizzata da ascolto passivo da parte degli allievi o senza evidenze di interazione tra essi. Esempi di discussione matematica sono presenti nella letteratura sulla didattica della matematica, in modo esplicito almeno dalla metà degli anni 80 (alcuni riferimenti sono in Bartolini Bussi 1991).

Il genere di discorso della discussione è raramente osservabile nelle classi standard: le osservazioni compiute (non solo per la matematica) mostrano la predominanza di discorsi con lo schema seguente (noto come IRF)

1. avvio (*Initiation*), dell'insegnante;
2. risposta (*Response*) dell'allievo;
3. commento valutativo (*Feedback*) dell'insegnante.

L'esempio riportato più oltre rappresenta bene l'interazione tra un insegnante, disponibile a dare spazio ai suoi allievi, ma più desideroso di incanalare rapidamente le loro proposte nel verso predefinito della lezione. E' una situazione più frequente di quanto non si creda: la maggior parte degli insegnanti realizza questo effetto *imbuto* nelle proprie classi per mezzo di una gestione a *botta e risposta*, senza neppure esserne consapevole, al punto che l'ascolto critico della registrazione di una propria lezione è spesso causa di sorprese e perfino di crisi.

Nonostante ciò, la vita di una classe scorre spesso in modo abbastanza tranquillo: tutto si basa sull'accettazione (implicita) di alcune regole della interazione scolastica che sono state riassunte da due studiosi inglesi nel modo seguente (Edwards & Mercer 1987):

- (a) solo l'insegnante fa domande;
- (b) l'insegnante conosce tutte le risposte;
- (c) domanda ripetuta equivale a risposta sbagliata.

E' banale rendersi conto che queste regole sono diverse da quelle della vita comune; eppure esse devono essere precocemente interiorizzate dagli allievi al loro ingresso nella scuola. Nel caso che ciò non avvenga, l'allievo sarà presto qualificato come un disturbatore o un allievo con difficoltà.

Routines più complesse sono state messe in evidenza, per la matematica, dal gruppo di Bauersfeld (e. g. Voigt 1985), tutte fondate su uno stretto controllo del discorso attraverso domande o commenti dell'insegnante.

ESEMPIO

L'insegnante ha proposto il problema di comunicare il disegno sulla lavagna (che rappresenta una carta geografica con le connessioni viarie) ad un allievo nella stanza accanto. Gli interventi dell'insegnante sono in corsivo, per differenziarli da quelli degli allievi (non distinti tra di loro nel testo originale):

Potremmo usare il codice Morse

Beh il codice Morse non è necessario. Possiamo parlargli. E' solo dietro alla porta.

Le coordinate

Può essere una buona idea.. un'ottima idea. Come le vorresti usare?

Dire 5 a destra o in giù e

Splendido. non ci avrei mai pensato. Qualche altra idea?

Uno specchio in alto..

Beh uno specchio non passa attraverso una porta chiusa.

Fare una foto polaroid e passarla sotto la porta.

Ah, questa è una novità. Ma mettiamoci d'accordo: il nostro amico non sa niente di coordinate e non c'è una macchina fotografica. Come possiamo fare?

Con gli angoli

Con gli angoli

Dirgli l'angolo in alto

Quel... angolo

Quello vicino a *(indica una città)*, oppure degli altri *(ne indica alcuni)*.

Un angolo qualunque

Beh a parte l'idea delle coordinate, tutte le altre sono un po' difficili da realizzare.

(Pimm 1987, pag. 63)

La definizione di Pirie e Schwarzenberger citata all'inizio vuole esplicitamente richiamarsi ad una diversa cultura di classe in cui l'allievo è considerato responsabile del suo apprendimento, in una prospettiva dichiaratamente costruttivista.

Richards (1991), in un volume sul costruttivismo edito da von Glasersfeld riprende il termine *discussione matematica*, senza per altro fare riferimento agli autori precedenti. L'autore sostiene che, per diventare adulti alfabetizzati matematicamente, gli allievi devono imparare a parlare ciò che egli chiama *inquiry math*, cioè imparare a porre questioni matematiche, risolvere problemi matematici (nuovi per essi), proporre congetture, ascoltare argomenti matematici, leggere e porre in discussione articoli divulgativi e così via. Il ruolo dell'insegnante è considerato in modo esplicito, con ampie citazioni dal lavoro di Schoenfeld: l'essenza del buon insegnamento è ricondotta alla disponibilità di studenti ed insegnante ad apprendere dalla loro mutua partecipazione ad una discussione; la competenza matematica dell'insegnante, giudicata essenziale dall'autore, è finalizzata alla progettazione di un contesto nel quale gli studenti possano costruire la matematica.

Nell'approccio di Pirie & Schwarzenberger nessuna enfasi è posta sul ruolo dell'insegnante; gli autori, infatti, si propongono di applicare la loro definizione al processo di comunicazione nelle situazioni di classe, senza distinguere tra discorsi condotti in presenza dell'insegnante o interazione tra pari (es. lavoro di piccolo

gruppo). La posizione di Richards appare più articolata ma l'enfasi posta sull'allievo (e sul processo di apprendimento) lascia comunque in ombra il ruolo dell'insegnante (e il processo di insegnamento).

Anche nella tradizione scientifica francese, il cosiddetto *débat scientifique* è applicato alla matematica sia al livello della scolarità obbligatoria (vedi ad esempio Arzac & al. 1992), che a livello più avanzato (vedi ad esempio Legrand 1988). Il ruolo fondamentale assegnato all'insegnante, nel corso del dibattito, è quello di moderatore: l'attenzione è posta soprattutto sul ruolo dei **conflitti socio-cognitivi** (Doise & Mugny 1981), cioè dei conflitti che si presentano, nell'interazione tra pari, quando una strategia è esplicitamente contraddetta da un'altra persona che prende parte alla discussione.

2. Critica.

Questi esempi, pur diversi, (ed altri si potrebbero citare dalla letteratura) sono accomunati dalla concezione della discussione come uno strumento per costruire, attraverso la negoziazione nella classe, domini di consenso, nei quali possa avvenire la comunicazione su un argomento matematico.

Ma riteniamo davvero che i concetti scientifici siano oggetto di negoziazione? che gli allievi in una situazione ricca e stimolante possano ricostruire da soli la quantità e varietà di strumenti matematici messi a punto dall'umanità nel corso di secoli e sotto la spinta di pressioni di tipo sociale, ideologico, filosofico, economico, estetico ecc.

Il problema è duplice: da un lato è in gioco la *coerenza* del prodotto dell'allievo con la cultura esistente; dall'altro l'*efficienza* del processo di costruzione. La presenza di una guida esperta nel processo sembra necessaria. Ma, nella ricerca didattica, l'enfasi sulla responsabilità dell'allievo nell'apprendere non è bilanciata dall'attenzione per la responsabilità dell'insegnante nell'insegnare.

Un problema centrale della ricerca didattica (ancora non risolto) può essere così formulato:

come analizzare / pianificare il processo globale di insegnamento apprendimento, senza trascurare nessuno dei due poli?

L'approccio del nostro gruppo alla discussione matematica è orientato a fornire, sul tema specifico, un complesso di strumenti di analisi e pianificazione che tiene conto della globalità del processo.

Questo approccio ci ha condotti, nel tempo, a prendere le distanze dalle concezioni di discussione matematica di impianto costruttivista, come quelle più sopra citate.

Per fondare il nostro lavoro sul versante della psicologia dell'educazione abbiamo trovato in Vygotskij strumenti più idonei di quelli offerti dalla tradizione Piagetiana, che ha ispirato il costruttivismo nelle sue forme più radicali. In questo processo di progressiva costruzione di un quadro teorico, abbiamo trovato utile la lettura del libro *Discutendo si impara: Interazione sociale e conoscenza a scuola* di Clotilde Pontecorvo, Anna Maria Ajello e Cristina Zucchermaglio. Il nostro lavoro è complementare rispetto ad esso, perché affronta il problema della costruzione del sapere matematico a scuola (non considerato nel testo citato, che presenta invece esempi sulle scienze naturali, sulla storia, sull'economia e sulla lingua scritta). Il problema è da noi affrontato secondo il paradigma della ricerca didattica che mette in primo piano l'analisi storico epistemologica del sapere in gioco, a partire dalla quale si modellano anche le forme dell'interazione sociale.

3. Quadro di riferimento.

Il quadro di riferimento da noi adottato è dichiaratamente Vygotskiano. Nel seguito faremo riferimento a diverse idee ed ipotesi Vygotskiane, senza la pretesa di dare una presentazione organica e coerente del pensiero di Vygotskij (impresa riconosciuta impossibile da psicologi professionali che pure sono stati formati alla sua scuola ed hanno accesso alle opere edite ed inedite in lingua originale).

La prima ragione per leggere Vygotskij nel corso di una ricerca sulla discussione matematica sta nell'importanza centrale e fondazionale delle relazioni interpersonali nello sviluppo della coscienza individuale. La *legge genetica dello sviluppo culturale* (citata di solito rapidamente come **# INTERIORIZZAZIONE**) recita:

Ogni funzione nel corso dello sviluppo culturale del bambino fa la sua apparizione due volte, su due piani diversi, prima su quello sociale, poi su quello psicologico, dapprima tra le persone come categoria interspichica e poi all'interno del bambino come categoria intrapsichica. Ciò vale ugualmente sia per l'attenzione volontaria che per la memoria logica, che per la formazione dei concetti e lo sviluppo della volontà. Siamo nel pieno diritto di considerare questa assunzione come una vera e propria legge, ma s'intende che il passaggio dall'esterno all'interno trasforma il processo stesso, ne muta la struttura e le funzioni, dietro a tutte le funzioni superiori e ai loro rapporti stanno geneticamente delle relazioni sociali, relazioni reali tra uomini. Ne segue che uno dei principi fondamentali della nostra volontà è la divisione delle funzioni tra gli uomini, una nuova suddivisione binaria di ciò che ora è fuso insieme, il dispiegarsi, sperimentale, del processo psichico superiore nel dramma che ha luogo tra gli uomini.

Va sottolineato che, per Vygotskij, tale legge si applica a **tutte** le funzioni psichiche superiori, sistemi complessi di processi mentali, che sono socialmente e culturalmente determinati. Anche la **# COSCIENZA** è inerente all'uomo esclusivamente in virtù della sua essenza sociale e culturale. In altre parole, *la comprensione della natura della coscienza richiede di indagare al di fuori del soggetto*.

Questa citazione è più lunga di quella (limitata alle prime tre righe) generalmente riportata in molti studi sull'interazione sociale (e perfino nella 'traduzione' americana, ritradotta in italiano presso Boringhieri): una simile lettura parziale dell'interiorizzazione è applicata per interpretare la crescente capacità di dialogare con se stessi (con tutti i benefici effetti sul controllo metacognitivo esercitato attraverso il linguaggio) osservabile in quegli allievi che hanno consistente esperienza di lavoro in collaborazione. Questa lettura è sufficiente a inquadrare anche studi molto seri, come quelli sul conflitto socio-cognitivo condotti dalla scuola ginevrina di Doise, Mugny, Perret-Clermont, Schubauer-Leoni ed altri (in situazione di interazione tra pari) che molto hanno influenzato la ricerca francese.

La citazione completa esplicita il senso della legge Vygotskiana dell'interiorizzazione, che si riferisce a interazioni tra soggetti che interpretano **ruoli diversi**. Trasportare questa legge alla situazione della classe, significa per noi sottolineare:

- (1) l'esistenza di funzioni (ruoli) diverse tra insegnante ed allievi;
- (2) la necessità di conservare e valorizzare queste funzioni nell'attività di insegnamento-apprendimento.

4. Una concezione Vygotskiana (e Bachtiniana) di discussione.

In prima approssimazione possiamo cercare la discussione matematica nella parte verbale dell'attività di insegnamento-apprendimento nelle lezioni di matematica, così come questa può essere riprodotta da un registratore. E' ovvio che questa parte verbale non esaurisce l'attività, in quanto non tiene conto degli aspetti gestuali, grafici etc. Tuttavia ci offre una prospettiva rilevante sui processi che si svolgono nella classe per la tradizionale importanza che il linguaggio riveste nell'ambiente scolastico. Inoltre,

integreremo tale prospettiva attraverso il costrutto della # **MEDIAZIONE SEMIOTICA** che ci consentirà di considerare anche altri tipi di rappresentazioni esterne.

Non tutte le verbalizzazioni che si possono ascoltare nelle classi sono significative per la costruzione di quelle funzioni psichiche superiori che sono basilari nell'attività matematica. Proprio l'osservazione delle classi tradizionali mostra la dominanza di quei tipi di discorso che orientano fortemente gli allievi verso le risposte attese dall'insegnante piuttosto che verso la costruzione personale di concetti o procedure. Ciò che può rendere significativa l'azione e la verbalizzazione che l'accompagna è la sua adeguatezza a *rappresentare una parte del dramma recitato dall'umanità* in relazione a quel particolare concetto o procedura matematica, la cui costruzione è richiesta per la soluzione dei problemi affrontati.

In un dramma più voci sono presenti: quindi una prima caratteristica di una discussione matematica significativa per i partecipanti è la presenza in essa di più voci. Il termine # **VOCE** è qui usato nel senso di Bachtin per intendere *una forma di discorso e di pensiero che rappresenta il punto di vista di un soggetto, il suo orizzonte concettuale, il suo intento e la sua visione del mondo*. Una voce ha quindi una componente interna (*pensiero*) ed una componente esterna (*discorso*), che rende possibile la comunicazione, l'interpretazione e tutte quelle forme di controllo che passano attraverso le rappresentazioni esterne.

Una voce rappresenta l'appartenenza ad una particolare categoria sociale e culturale ed è quindi ricollegabile ad un ruolo nel dramma, metaforicamente richiamato nella legge genetica di Vygotskij. Tuttavia, perché le diverse voci siano riconosciute (ed interiorizzate) dai partecipanti, è necessario tempo per la loro articolazione esplicita.

Questa indicazione è in contrasto con ciò che avviene nelle situazioni tradizionali di classe controllate fortemente dall'insegnante, nelle quali ogni voce divergente rispetto a quella prescelta dall'insegnante è valutata immediatamente come non pertinente o perfino sbagliata: anche se in certi casi più interlocutori intervengono 'fisicamente', ciò che è salvato nel flusso del discorso è il *monologo* dell'insegnante e di tutti gli interlocutori che offrono contributi di sostegno ad esso. Questa caratteristica monologica, di fatto osservabile nella classi a prescindere dall'oggetto del sapere in gioco, sembra particolarmente frequente nelle lezioni di matematica, come causa - effetto dell'immagine di senso comune della matematica stessa. Ricordiamo, a tale riguardo, che proprio la matematica (e più in generale ogni scienza esatta) è indicata da Bachtin come esempio paradigmatico di *forma monologica di sapere*, in cui l'intelletto contempla un oggetto e si pronuncia su di esso, da contrapporsi alle scienze umane, che, occupandosi di soggetti e di interpretazioni, rappresentano *forme dialogiche di sapere*. E' indubbio che la scelta da noi fatta è orientata a superare questa contrapposizione.

In una discussione le diverse voci non sono necessariamente in corrispondenza con le espressioni verbali dei diversi interlocutori fisicamente presenti: due diversi interlocutori possono usare la stessa voce, quando i loro discorsi sono in sintonia; uno stesso interlocutore può usare voci diverse, quando cita il discorso di un altro (ad esempio, l'insegnante che inserisce in un'attività la lettura di un brano da un libro di testo), oppure imita il discorso di un altro (ad esempio, l'allievo che assume il ruolo dell'insegnante sintetizzando diversi interventi precedenti), oppure introduce una prospettiva diversa su uno stesso problema (ad esempio richiama una esperienza extrascolastica in una discussione su un oggetto matematico).

Di qui in avanti,

una discussione matematica è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento apprendimento.

(il termine *motivo* è usato nel senso di Leont'ev per indicare l'oggetto globale dell'*attività* collettiva che si distende nel lungo termine; esso non coincide necessariamente, anche se è con esse coerente, con gli *obiettivi* specifici ed espliciti delle singole *azioni* che la compongono. vedi # ATTIVITÀ, AZIONI, OPERAZIONI).

E' al di fuori dello scopo di questo lavoro discutere i limiti e la potenzialità di questa metafora (non una definizione in senso matematico), che vuole solo sottolineare aspetti complementari rispetto a quelli degli autori citati nel § 1.

Questa descrizione ha alcune analogie con quella proposta da Pirie e Schwarzenberger, poiché:

(1) in entrambe esiste un tema che ne definisce l'obiettivo;

(2) in entrambe esiste l'interazione tra le voci (qui implicita nella polifonia);

ma è diversa da quella, poiché :

(1) in questa esiste un riferimento esplicito all'*attività di insegnamento-apprendimento (processo di lungo termine)*, mentre in quella il riferimento è solo all'obiettivo immediato;

(2) in questa si richiede la presenza di voci diverse, tra cui, essenziale (per il motivo dell'*attività di insegnamento-apprendimento*), quella dell'insegnante che rappresenta la comunità culturale esterna nella classe e a cui è istituzionalmente affidato il compito di trasmissione del sapere;

(3) in questa si valorizza anche la presenza di voci imitanti (vedi la rilevanza dei diversi tipi di imitazione nel contrappunto), mentre in quella si sottolinea l'apporto di contributi originali dagli allievi;

(4) in questa si prescinde dall'esistenza fisica di una comunità di parlanti (cioè può esistere anche la discussione tra sé e sé, cioè il dialogo interiore, e la discussione con un interlocutore non fisicamente presente, ma rappresentato da un testo scritto), mentre in quella il riferimento è agli interlocutori fisicamente distinti.

Esistono verbalizzazioni che sono discussioni matematiche nel senso di Pirie & Schwarzenberger, ma non nel nostro: ad esempio, gli autori considerano discussioni quegli episodi della vita di classe in cui gli allievi si pongono da soli un problema (che può essere risolto con l'uso di strumenti matematici) e tentano da soli di risolverlo, anche nel caso in cui i loro tentativi appaiano incoerenti (e siano infruttuosi) nei confronti degli oggetti dell'*attività di insegnamento - apprendimento della matematica*, così come essa è considerata dall'istituzione scolastica. Queste esperienze non sono da noi prese in esame perché in esse manca la voce della cultura matematica.

Esistono verbalizzazioni che sono discussioni matematiche nel nostro senso ma non in quello di Pirie & Schwarzenberger: ad esempio, il dialogo interiore o la lettura critica di un testo.

Esistono verbalizzazioni che sono discussioni matematiche nei due sensi: ad esempio le discussioni orchestrate dall'insegnante.

Sono rappresentabili nella nostra metafora diversi tipi di discussioni:

A) discussione di tutta la classe orchestrata dall'insegnante;

B) dialogo tra un insegnante ed un allievo (es. tutoring);

C) discussione di piccolo gruppo tra allievi;

D) interpretazione di un testo scritto;

E) discussione con se stesso (dialogo interiore).

Il secondo caso è stato studiato recentemente da Schoenfeld (1992) e collaboratori: nella nostra realtà un esempio significativo è dato da quella forma di tutoring realizzata con il dialogo orale o scritto tra l'insegnante ed un allievo (eventualmente in difficoltà) nel gruppo di Genova. Il terzo caso è quello forse maggiormente studiato nella letteratura (ad esempio, nelle ricerche francesi (Arsac et al. 1988), o nelle ricerche americane sul problem solving e in ricerche della scuola di Mosca): uno dei meccanismi su cui si basa il processo del gruppo è il conflitto socio-cognitivo (cioè un conflitto, sperimentato sul piano sociale, nel quale una strategia individuale è

esplicitamente contraddetta dalla strategia proposta da un'altra persona): esso può essere interpretato, nella nostra metafora, come l'emergenza di voci articolate diverse. Non ci occuperemo di questi casi.

Il primo caso è quello studiato (pianificato e analizzato) nella nostra ricerca e sarà ripreso con dettagli nel prossimo paragrafo. Il quarto caso è studiato nella nostra ricerca, nel corso di processi di lungo termine, quando è necessario un riferimento esplicito alla cultura prodotta dall'umanità. Il quinto caso è osservato nella nostra ricerca come effetto a lungo termine dell'esperienza sistematica di discussione: voci diverse sono espresse (fisicamente) da uno stesso soggetto, che le ha interiorizzate a partire dall'attività collettiva (v. esempio).

ESEMPIO

Brano di discussione di allievi di seconda elementare sulla consegna: *Disegna un cubo dal vero proprio come lo vedi*. L'insegnante ha chiesto: *come è andata?*

* *Io la cosa subito che ho...si che mi sono chiesta, ho detto, 'che cosa non vedo?' e poi ho disegnato quello che vedevo e non quello che non vedevo e dopo mi è venuto fuori.*

** *Ah.. io sono andata dietro agli angoli così riuscivo a far bene. Poi per prima cosa ho detto, mi son chiesta: 'ma devo disegnare anche quello che non vedo o quello che vedo?' Poi ho letto quello che c'era scritto e ho capito che bisognava disegnare solo quello che vedevamo.*

*** *Io, come l'Ingrid, mi sono chiesta: 'che cos'è che non vedo?' poi dopo che me lo sono chiesto ho disegnato per prima la parte di sopra, poi ho cominciato a fare la parte di sotto.*

•

Verbalizzazione scritta di un'allieva di seconda elementare. Consegna: *Disegna un cubo a memoria*.

Io mi sono chiesta prima di tutto: 'come si fa a disegnare un cubo a memoria?' Io me lo sono immaginata sul banco e allora con il dito ci sono ripassata al cubo che ho immaginato e allora ogni angolo che toccavo con il dito lo disegnavo sul foglio bianco.

•

Schema costruito da un'allieva di quarta elementare per guidare il proprio commento al disegno dell'aula.

SCHEMA CHE MI PUÒ AIUTARE

1. *Che problema ho avuto?*
2. *Come li ho risolti?*
3. *'Guardando s'impara!'*
4. *Che tecniche usare oltre a guardare?*
5. *Questo disegno è uguale ad altri che abbiamo fatto?*
6. *Mi è piaciuto? Perché?*
7. *Li vediamo simili alla realtà?*
8. *Come vede il nostro occhio?*
9. *Cosa è simile [alla realtà] e cosa no nel mio disegno?*

5. La discussione matematica dell'intera classe orchestrata dall'insegnante.

In questo paragrafo daremo alcuni dettagli su questo particolare tipo di discussione matematica che costituisce l'oggetto della nostra ricerca.

La presenza dell'insegnante garantisce fino dall'inizio la possibilità della articolazione di voci diverse da quelle degli allievi (in effetti la costruzione / conservazione di questa polifonia è uno dei principi base per la gestione, come vedremo nel seguito).

L'insegnante ha il ruolo di guida nel senso che:

- (a) inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe,
- (b) influenza in modo determinante lo sviluppo della discussione attraverso i suoi interventi.

Questi due aspetti non possono essere separati, anche se la loro analisi deve essere per forza di cose condotta in tempi diversi.

La teoria dell'attività proposta da Leont'ev (vedi # ATTIVITÀ AZIONI OPERAZIONI) offre un quadro di riferimento organico per queste analisi complementari:

il livello *attività - azioni* analizza l'esistenza di una relazione tra un *motivo* generale dell'attività di insegnamento - apprendimento e gli *obiettivi* particolari di una certa discussione;

il livello *azioni - operazioni* analizza l'esistenza di una relazione tra un *obiettivo* e le *strategie comunicative* messe in opera dall'insegnante nella concreta situazione della classe.

La distinzione è a scopo puramente analitico: è chiaro che le strategie comunicative hanno un grosso impatto anche sull'attività globale, nel senso che l'insegnante definisce valori e atteggiamenti nei confronti della matematica attraverso le espressioni che usa in situazioni specifiche.

Le analisi che suggeriremo saranno per livelli di contestualizzazione crescente. Partiremo da una analisi di alcuni tipi di discussione che sono stati studiati dal nostro gruppo in relazione a motivi generali dell'attività di insegnamento - apprendimento della matematica. Tale analisi ci fornirà alcuni elementi per guidare:

- (a) l'inserimento di una discussione come azione in una attività,
- (b) la definizione di un canovaccio standard per i tipi più comuni di discussioni.

Successivamente scenderemo all'analisi più fine della gestione delle singole discussioni, fornendo alcuni elementi di carattere generale applicabili ad intere classi di discussioni e descrivendo poi la necessaria analisi 'locale' strettamente legata non solo al problema ma anche alla classe in cui il problema è proposto.

Un'ultima osservazione è necessaria: in una stessa 'sessione di discussione' (ad esempio una discussione di un'ora orchestrata dall'insegnante) diversi tipi di discussioni matematiche possono essere presenti ed intrecciarsi. Si può discutere di un problema, per poi passare a collegare questo problema ad altri problemi e generare regole più generali, riapplicandole poi a casi particolari. Le tipologie di discussione sono diverse. Le analisi si riferiranno quindi a quei particolari spezzoni di discussioni che sono riconducibili ad una certa tipologia.

6. I diversi tipi di discussione.

Fino dall'inizio abbiamo focalizzato l'attenzione su tre grandi classi di discussioni (con sottoclassi), basando questa scelta, in modo implicito e forse non del tutto consapevole, su alcune priorità nell'attività di insegnamento - apprendimento della matematica nella scuola elementare (prima di estendere la ricerca a tutta la scuola dell'obbligo).

A. Discussione di un problema, vista come parte dell'attività complessiva di problem solving, nei due aspetti di.

A1. discussione di soluzione, intesa come quel processo di tutta la classe che risolve un problema dato a parole con l'eventuale supporto di oggetti o immagini,

A2. discussione di bilancio, intesa come il processo di informazione, analisi e valutazione delle soluzioni individuali proposte ad un problema dato a parole con l'eventuale supporto di oggetti o immagini o nel corso di una discussione orchestrata dall'insegnante.

B. Discussione di concettualizzazione, intesa come il processo di costruzione attraverso il linguaggio dei collegamenti tra esperienze già vissute e termini particolari della matematica; essa può essere introdotta da domande dirette del tipo: *che cosa è un numero? che cosa vuol dire punto di vista? che cosa è un grafico?* o indirette del tipo: *perché molti di voi hanno descritto questo problema come un problema di disegno geometrico?*

c. Metadiscussione, intesa (qui la caratterizzazione è molto meno precisa, anche se sentiamo il bisogno di distinguerla dalle altre e di riservarle una funzione importante nell'attività) come momento della definizione dei valori e degli atteggiamenti nei confronti del sapere matematico. Essa può essere introdotta da domande del tipo: *come nascono le figure? come si apprende la matematica?*

Quelle citate non sono le uniche azioni collettive svolte nella classe: sono tuttavia quelle che si ritrovano con regolarità negli esperimenti didattici da noi pianificati, sperimentati ed analizzati in relazione a problemi diversi. Per problemi particolari pertinenti a **campi di esperienza** (Boero 1989, 1992) specifici abbiamo anche altre azioni collettive significative: ad esempio, nell'esplorazione del campo di esperienza delle **ombre solari** ci sono le azioni in cortile di osservazione di ombre e produzione di ipotesi relative; nell'esplorazione del campo di esperienza della **rappresentazione del mondo visibile** ci sono le azioni collettive di osservazione, progettazione e costruzione di un **prospettografo**. Sembra difficile (e forse inutile) ricondurre ad una modellizzazione decontestualizzata azioni che hanno senso solo nell'attività relativa ad un particolare campo di esperienza. Un caso particolare (lettura collettiva di **fonti storiche**) sarà esaminato separatamente per l'importanza crescente che sta assumendo nei nostri esperimenti (vedi 9.4).

Vediamo ora alcuni modelli particolari.

7. Un primo modello: discussioni di bilancio

La *discussione di bilancio* è l'interazione di grande gruppo orchestrata dall'insegnante allo scopo seguente:

socializzare e valutare collettivamente le strategie usate dai singoli allievi nella soluzione di un problema e costruire (quando è possibile) una o più rappresentazioni e soluzioni condivise da tutta la classe e consistenti con quelle costruite a livello adulto per mezzo di concetti e procedure matematiche.

Essa viene introdotta dall'insegnante alcuni giorni dopo la soluzione individuale del problema (inutile precisare che si deve trattare di un problema sufficientemente aperto e significativo e non di un semplice esercizio): nel frattempo l'insegnante ha raccolto tutti gli elaborati individuali ed ha potuto classificarli raggruppando insieme quelli che si riferiscono ad una stessa rappresentazione del problema ed una stessa strategia risolutiva. L'intervallo di tempo consente all'insegnante una adeguata pianificazione della discussione e favorisce negli allievi il distanziamento dal proprio prodotto.

I numerosi esperimenti condotti, in classi diverse e su problemi diversi ci hanno consentito di individuare un *canovaccio standard* per le discussioni di bilancio, articolato in diverse fasi:

- (a) il *vero bilancio*, finalizzato al confronto delle strategie;
- (b) la esplicitazione dei *processi di soluzione*, finalizzata alla ricostruzione e alla socializzazione dei processi individuali;
- (c) la esplicitazione dell'*apprendimento*, finalizzata alla identificazione degli elementi di novità introdotti dal problema nella storia individuale degli allievi e collettiva della classe;

(d) la *istituzionalizzazione dell'apprendimento*, finalizzata alla formulazione dei concetti e delle procedure che devono essere ricordati e al loro collegamento con le conoscenze precedenti.

L'analisi dettagliata del canovaccio è rinviata al § 12.

8. Un secondo modello: discussioni di concettualizzazione.

La *discussione di concettualizzazione* è l'interazione di tutta la classe orchestrata dall'insegnante intorno ad una parola o ad una locuzione per lo scopo seguente:

favorire l'espressione dei sensi personali dati dai singoli allievi alle loro esperienze, ai loro prodotti ed ai loro processi (richiamati dalla parola o dalla locuzione in oggetto) nel significato, così come esso è stato cristallizzato nel suo portatore sensibile (una parola o un'associazione di parole) attraverso l'esperienza sociale dell'umanità.

I termini *significato* e *senso personale* (o *soggettivo*) sono qui usati nel senso di Leont'ev (**# SENSO PERSONALE - SIGNIFICATO**)

il significato è ciò che si rivela nell'oggetto o nel fenomeno oggettivamente, nel sistema dei legami e dei rapporti, delle interazioni oggettive. Il significato si riflette, viene fissato nel linguaggio ed assume grazie a ciò stabilità. In questa forma, nella forma di significato linguistico, esso costituisce il contenuto della coscienza sociale; entrando nel contenuto della coscienza sociale esso diventa anche 'coscienza reale' degli individui, oggettivizzando in sé il senso soggettivo di ciò che è riflesso per loro. La riflessione cosciente, perciò, è caratterizzata dall'esistenza di uno specifico rapporto interiore, il rapporto tra il senso soggettivo e il significato | |

La discussione di concettualizzazione è chiaramente collegata al processo di *denominazione*, cioè di attribuzione di un segno (parola o locuzione costituita da più parole) al complesso dei modi con cui un certo oggetto dell'esperienza si presenta alla mente. La discussione è quindi un momento collettivo del processo di costruzione della *immagine concettuale* individuale collegata ad una certa locuzione della matematica. L'espressione *immagine concettuale* è qui usata nel senso di Tall & Vinner (1981) come

la struttura cognitiva complessiva che è associata con un dato concetto, che comprende tutte le immagini mentali, le proprietà, i processi associati, essa è costruita nel tempo attraverso esperienze di tutti i tipi e si modifica a mano a mano che il soggetto matura ed incontra nuovi stimoli.

L'immagine concettuale può contenere anche una *definizione del concetto* all'interno di una trattazione matematica, ma contiene anche esempi, controesempi e parti contraddittorie tra loro. Il processo di discussione rende espliciti sia le somiglianze che le differenze, sia le concordanze che i conflitti.

La discussione di concettualizzazione viene introdotta dall'insegnante dopo un certo numero di esperienze scolastiche, nel corso delle quali un certo concetto è stato in gioco come strumento (esplicito, ma più spesso implicito) di soluzione di problemi. La discussione ruota intorno ad un compito preciso: *esprimere in termini linguistici che cosa significa una parola (o una locuzione più complessa), rispondendo alla domanda: che cosa vuol dire (per me)...? che significato ha (per me)...?*

Il *significato* che contribuisce a definire l'obiettivo della discussione si colloca ad un livello di matematizzazione superiore rispetto a quello in cui sono ipotizzati gli allievi. Esso infatti è decontestualizzato rispetto alle esperienze da essi compiute. Il processo che si innesca è quello (dialettico) tra **# CONCETTI QUOTIDIANI E CONCETTI SCIENTIFICI** direttamente collegato da Vygotskij al problema della **# COSCIENZA**. Il termine quotidiano va qui inteso come *riferito all'esperienza precedente degli allievi e*

quindi collocabile anche ad un livello già parzialmente matematizzato. La discrepanza tra il concetto (matematico) di cui è portatore l'insegnante e il concetto (quotidiano) di cui sono portatori gli allievi (voci diverse nella discussione) è tipico della comunicazione tra adulti e bambini, tra insegnanti ed allievi:

Le parole del bambino coincidono con le parole dell'adulto nel loro riferimento all'oggetto, cioè indicano gli stessi oggetti, si riferiscono allo stesso cerchio di fenomeni: non coincidono però nel loro significato.

La coincidenza è quella che rende possibile la comunicazione; la non coincidenza è quella che rende possibile lo sviluppo del bambino nella sua interazione con l'adulto, dell'allievo nella sua interazione con l'insegnante. L'appropriazione (nell'uso) di una parola è un momento di un processo dialettico (*dialettica cognitiva*) attraverso il quale il bambino si appropria progressivamente anche di un significato (scientifico) di quella parola, che gli viene, non solo dalla riflessione sulla sua esperienza personale, ma anche dall'esperienza culturale nella quale è guidato dall'adulto. Questa dialettica realizza i movimenti lungo due linee di verso opposto: dalla cosa al concetto e dal concetto alla cosa.

In tali discussioni gli allievi si confrontano con un problema che ricorre nella storia della matematica: la *definizione* di un concetto, che lo ponga come oggetto all'interno della rete delle conoscenze scientifiche già esistenti a partire da una o più situazioni che lo hanno visto costituirsi come strumento di soluzione di problemi (esterni o già interni alla matematica) (vedi # **STRUMENTO - OGGETTO**). Questo processo *simula il dramma recitato tra gli uomini* (vedi # **INTERIORIZZAZIONE**) sostituendo alle pressioni di tipo sociale e culturale che hanno costituito un certo lento sviluppo della scienza la guida esperta dell'insegnante. Anche se si tratta, ovviamente, di una simulazione, di cui anche gli allievi sono consapevoli (è chiaro che l'insegnante conosce già le risposte) gli allievi si scontrano con autentici ostacoli epistemologici (vedi # **OSTACOLO EPISTEMOLOGICO**) ed offrono spesso formulazioni simili a quelle documentate nella storia della matematica.

Diversi esperimenti condotti ci hanno consentito di individuare un *canovaccio* per le discussioni di concettualizzazione, articolato in diverse fasi (in questo caso il numero degli esperimenti è più limitato e l'analisi ancora iniziale, inoltre l'elencazione ha la funzione di promemoria piuttosto che di sequenza temporale):

- (a) l'*apertura*;
- (b) l'*esplicitazione dei sensi personali*;
- (c) la *costituzione dei significati*;
- (d) la *dialettica cognitiva*;
- (e) l'*istituzionalizzazione*.

L'analisi dettagliata del canovaccio è rinviata al § 13.

9. Prime conclusioni.

Mentre la discussione di bilancio è ampiamente documentata nella letteratura sul problem solving (anche se con modalità un po' diverse, vedi ad esempio le ricerche del gruppo di Cobb, le ricerche francesi di Arzac o quelle influenzate da Douady), la discussione di concettualizzazione sembra uno dei contributi originali prodotti dal nostro gruppo (probabilmente perché collegata a problemi teorici di tipo fondazionale non molto popolari nella letteratura). Per quanto ci risulta, essa non è praticata in modo sistematico e non è studiata come oggetto di ricerca da altri. Questo spiega anche la nostra difficoltà e il bisogno di ricostruirci (dalle origini) una rete di riferimenti sul piano epistemologico e cognitivo.

Questo tipo di discussione è epistemologicamente giustificata ogni volta che è in gioco la costituzione di un # **MATEMATIZZATO**. E' chiaro che, a seconda dei problemi, il

matematizzato può essere costituito a partire dall'esterno della matematica o dall'interno della matematica stessa. In altre parole, la 'realtà' di riferimento su cui si costituiscono i sensi personali può essere esterna alla matematica (la cosiddetta 'matematizzazione del mondo reale') o già interna ad essa (la costruzione di un livello teorico superiore: la teoria delle funzioni; la teoria degli spazi vettoriali).

Questo problema è chiaramente correlato all'età degli allievi:

(a) con allievi molto giovani (es. primo ciclo scuola elementare) la discussione ha soprattutto la funzione di razionalizzare l'esperienza, guidando gli allievi alla costruzione di *testi* (che richiedono in maggiore o minore misura il ricorso, come strumenti, a concetti o procedure matematiche) su cui si possa ragionare ulteriormente:

(b) con allievi meno giovani (es. secondo ciclo scuola elementare o scuola media) la discussione ha la funzione di costruire *una rete di testi* collegati tra loro in un primo embrione di teoria, destinato a divenire essa stessa un **campo di esperienza** intellettuale; questa funzione, a priori, potrebbe applicarsi anche ad allievi più grandi (scuola superiore o università) per sistemazioni teoriche di livello superiore (ma su questo non abbiamo nessuna evidenza sperimentale).

Queste due caratteristiche possono condurre a situazioni intrinsecamente contraddittorie. Per giustificare questa osservazione (prima di interpretarla in positivo) facciamo un rapido riferimento alla storia della matematica ed in particolare alla funzione della definizione in due diversi contesti:

(1) i trattati di geometria pratica (documentati ad esempio dal medioevo a tutto il seicento).

(2) i trattati di geometria accademica (a partire dalla tradizione di Euclide).

Nella geometria accademica (cfr. la posizione di Aristotele) si usano definizioni *per inclusione*, in cui i diversi attributi, presi separatamente, individuano insiemi più ampi di quello da definire, il quale è appunto definito dalla congiunzione degli attributi (*un quadrato è un quadrilatero con tutti i lati uguali e tutti gli angoli retti*). Nella geometria pratica si usano definizioni *per partizione*, che sottolineano le diverse caratteristiche percettivamente evidenti degli oggetti considerati (*un rettangolo è un quadrilatero con tutti gli angoli retti ma non tutti i lati uguali*).

Le definizioni per partizione usano un criterio di classificazione *descrittivo*; le definizioni per inclusione usano un criterio di classificazione *strutturale*. Il primo risponde ai bisogni della geometria pratica, intesa come razionalizzazione dell'esperienza; il secondo ai bisogni della geometria accademica, intesa come corpus culturalmente consolidato di conoscenza teorica (vedi # **CONOSCENZA EMPIRICA - CONOSCENZA TEORICA**).

Da un punto di vista cognitivo, possiamo interpretare la dialettica tra queste due valenze della discussione di concettualizzazione, idealmente esperita dallo stesso allievo in periodi diversi di un processo di lungo termine, come il gioco tra # **CONCETTI QUOTIDIANI** e **CONCETTI SCIENTIFICI**, così come esso è presentato da Vygotskij.

Un importante studio relativo proprio al caso della definizione in geometria (studio dei poliedri a livello di scuola media) è stato pubblicato recentemente da Mariotti (1995).

Riteniamo che le discussioni di concettualizzazione con allievi molto giovani, attraverso la focalizzazione su un testo (il più prossimo possibile ad una formulazione accettabile a livello adulto), preparino la strada alle discussioni di concettualizzazione successive con le quali realizzare lo spostamento sulla rete di testi, secondo le regole accettate nella cultura matematica. Perché questo possa avvenire è necessario costruire un costume di classe che prevede non solo rotture del contratto ma esplicitazione di contraddizioni tra conoscenze già istituzionalizzate e conoscenze da costruire: in altre parole è necessario che gli # **OSTACOLI EPISTEMOLOGICI** divengano oggetto di riflessione esplicita.

Altri tipi di discussione che abbiamo incontrato nella realizzazione di esperimenti didattici, come funzionali al percorso, ma su cui non abbiamo ancora impostato una ricerca particolare sono i seguenti.

9. 1. Discussione di soluzione.

E' la discussione di un problema che viene posto collettivamente a tutta la classe. Possiamo distinguere due casi che presentano problemi di gestione diversi:

(a) il problema è generato dagli allievi stessi nel corso di una discussione e accettato dall'insegnante;

(b) il problema è posto direttamente dall'insegnante.

In ogni caso la gestione della discussione è difficile, pensiamo per la difficoltà di sintonizzare i tempi individuali di soluzione, per cui hanno 'rivoli' di discussione indipendenti in cui singoli allievi vanno per la loro via senza interagire con gli altri. Ma il caso (b) sembra avere difficoltà aggiuntive, legate al rapporto istituzionale con l'insegnante. Abbiamo l'impressione (non abbiamo fatto una ricerca specifica, ma solo osservato alcune discussioni gestite dalla stessa insegnante nei due casi) che l'atteggiamento degli allievi nei confronti dei due problemi sia diverso, in quanto nel caso (b) c'è il bisogno di esprimere pubblicamente ad alta voce una soluzione, anche se ripete una soluzione già detta da altri.

9. 2. Discussione di concettualizzazione iniziale

Discussioni del tipo di concettualizzazione possono essere anche poste all'inizio, per raccogliere i "pre-concetti" degli allievi. In questo caso la gestione è più libera in quanto non si prevede la fase di istituzionalizzazione. Esse sono un modo alternativo all'intervista clinica per raccogliere informazioni preziose su possibili conflitti o sinergie tra l'esperienza precedente e il percorso che si è programmato.

9. 3. Metadiscussione

Con questo termine (generico) abbiamo indicato tutte quelle discussioni che pongono dall'inizio una questione direttamente collegata all'attività metacognitiva. Abbiamo sperimentato:

a) ricostruzione della storia della classe, spesso avviata con la lettura di un brano tratto da una discussione precedente;

b) discussioni di carattere epistemologico, sul rapporto realtà - matematica;

c) discussioni sul metodo: che senso ha discutere?

E' chiaro che si tratta di attività diverse, anche se le possiamo vedere idealmente collegate in un percorso collettivo di tutta l'umanità: il tipo (a) colloca l'attività del singolo individuo nel flusso collettivo dell'attività della classe; il tipo (b) colloca l'attività del singolo individuo nel flusso collettivo, ipotizzato mentalmente, dell'attività di individui lontani da noi nello spazio e nel tempo; il tipo (c) solleva a livello conscio l'aspetto collettivo dell'attività.

Riteniamo che questi tipi di discussione siano fondamentali:

nel caso (a) per mettere in opera la metacognizione e costruire l'atteggiamento favorevole ad un apprendimento 'per ostacoli' nel quale si possono costruire conoscenze parziali da rimettere in discussione successivamente;

nel caso (b) per sollevare a livello conscio il problema del rapporto tra realtà e modello; nei casi (a) e (b) per preparare la via all'introduzione esplicita delle fonti storiche nella classe (vedi § 9.4);

nel caso (c) per rendere esplicito uno dei motivi base del nostro progetto, cioè la costruzione sociale del sapere.

9.4. L'interpretazione di fonti esterne.

Abbiamo già visto (§ 4) che la proposta di lettura critica (con interpretazione) di fonti esterne rientra tra i casi di discussione da noi considerati. Perché la lettura non abbia caratteristiche monologiche, che possono generare al più adesioni passive, è necessario che il testo sia **interpretato** (o interpretabile) con riferimento alla esperienza già svolta dagli allievi.

Abbiamo utilizzato in diversi esperimenti didattici fonti scritte di tipo diverso:

(a) da un testo contemporaneo prodotto da un coetaneo (della stessa o di un'altra classe);

(b) da un testo contemporaneo per la scuola superiore;

(c) da un testo contemporaneo rivolto a lettori adulti (es. l'Enciclopedia Einaudi);

(d) da un testo antico (es. Galileo, Piero della Francesca);

o fonti di altro genere, come

(e) riproduzioni di disegni e incisioni, brani di film, modelli di strumenti.

Gli statuti sono molto diversi. Il caso (a) simula un processo di interazione tra pari, mentre negli altri casi c'è una iniziale esplicita asimmetria tra l'autore e la comunità dei lettori. Ma in tutti i casi siamo in presenza di uno strumento di **# MEDIAZIONE SEMIOTICA**, che introduce un legame di nuovo genere tra il problema e quella che è stata o sarebbe stata la risposta 'immediata' dell'allievo.

La costante necessità di **interpretazione**, realizzata nella classe dall'insegnante, trasforma la funzione della fonte da puramente **mnemotecnica** (cioè finalizzata alla memorizzazione di un certo risultato) a **ermeneutica** (cioè finalizzata alla comprensione di ciò che ha pensato un altro essere umano, e del meccanismo di generazione della nuova idea).

9.5. Problemi aperti.

Si può subito notare che classi importanti di possibili discussioni non sono citate: ad esempio non si parla di **dimostrazione**. I motivi sono vari: la nostra scelta si è orientata su discussioni che fossero rilevanti, almeno inizialmente, per i bambini della fascia d'età 6 - 10 anni. Nel seguito, per estendere il nostro studio anche alla scuola media ci siamo posti il problema: seguendo lo sviluppo imponente della letteratura internazionale sulla interazione sociale ed in particolare gli studi di Balacheff (1991) sulla dimostrazione, ci è apparso chiaro che la trattazione della dimostrazione in discussione è molto delicata, per la differenza tra argomentare a dimostrare, tra efficacia e rigore. Il problema appare quindi molto aperto.

10 . Modellizzazione: il livello (attività -) azioni - operazioni.

Il secondo livello di analisi si riferisce alla relazione tra gli obiettivi dell'azione (la discussione particolare che si intende analizzare), coerenti con i motivi dell'attività, e le strategie comunicative messe in opera dall'insegnante nel corso dell'interazione.

10.1. Analisi a priori ed analisi a posteriori.

Per il ruolo dell'insegnante, possiamo distinguere tra **analisi a priori** (l'organizzazione dell'interazione) ed **analisi a posteriori** (il funzionamento dell'interazione).

Il primo problema che si pone è quello dei limiti dell'analisi a priori. Riprendiamo a questo scopo un lavoro di Colette Laborde (1991) sulla dimensione sociale nella ricerca didattica francese. L'autrice distingue due modalità di funzionamento dei processi interpersonali nelle **situazioni a-didattiche**, cioè in quelle situazioni, dotate di logica interna, in cui l'allievo stabilisce una relazione personale con il problema e non si limita semplicemente a fornire le risposte attese dall'insegnante:

(1) i processi [interpersonali] costituiscono l'essenza stessa del problema che gli allievi devono risolvere: il problema è esso stesso di natura sociale: i processi sono **interni** al problema;

(2) [i processi] intervengono perché la risoluzione è fatta da un gruppo di allievi e non da un allievo solo, mentre il problema in se stesso non comporta una dimensione sociale: i processi sono **esterni** al problema.

Vengono forniti esempi dei due casi:

(1) una situazione di comunicazione (es. dettatura di una figura geometrica da uno o più individui - codificatori - ad uno o più individui - decodificatori).

(2) il processo di costruzione del messaggio in un gruppo di codificatori o di interpretazione del messaggio in un gruppo di decodificatori.

Vengono poi analizzate le differenze:

(1) in quanto interna al problema, la dimensione sociale può essere oggetto di analisi a priori e quindi strumento per l'organizzazione; la dimensione sociale è un mezzo per dare un senso a un problema matematico e favorire la sua devoluzione (nota: si ha devoluzione quando l'allievo considera il problema come una relazione tra sé e il sapere e non tra sé e l'insegnante).

(2) in quanto esterna al problema, la dimensione sociale può essere oggetto di analisi a posteriori per ciò che riguarda il funzionamento; la dimensione sociale interviene sul processo di soluzione direttamente, arricchendo il numero di soluzioni prodotte.

La discussione matematica non rientra tra le situazioni a-didattiche, considerate da Laborde. Possiamo osservare tuttavia che essa sembra avere caratteristiche comuni ad entrambe i casi considerati: la dimensione sociale **interna** è collegata alla ipotesi da noi adottata sul modello di apprendimento (interiorizzazione) e al contratto stabilito dall'insegnante (comunicazione non ambigua; convinzione dell'interlocutore) nell'ambito del costume della classe (es. costruzione sociale del sapere matematico); la dimensione sociale **esterna** è collegata alle complesse modalità di funzionamento dell'interazione. Anche se la distinzione di Laborde non si applica direttamente alla discussione matematica, essa ci suggerisce un atteggiamento prudente: limitare l'analisi a priori alla determinazione di costellazioni di strategie comunicative sulla base della dimensione sociale interna.

10. 2. L'approccio interpretativista.

Nella ricerca di strumenti di analisi, abbiamo rivolto l'attenzione all'approccio interpretativista, rappresentato in Italia da Lucia Lumbelli (1990). L'autrice introduce una distinzione metodologica fondamentale tra:

(1) le *opzioni fondamentali*, fondate su argomentazioni di carattere ideologico o di concezione del mondo, che costituiscono una specie di quadro da cui discende la valutazione generale della prassi educativa;

(2) le *opzioni empiriche* che stabiliscono che cosa è opportuno fare in certi contesti (dati) per rispettare le finalità educative (date), di cui al punto precedente.

Le seconde, a differenza delle prime, sono basate su verifiche sperimentali.

L'unità di analisi per il ruolo dell'insegnante è definita da un atto comunicativo, caratterizzato da particolari *intenzioni*, accertate sia in base all'introspezione del

parlante che nell'analisi rigorosa del testo prodotto. Un atto comunicativo può essere anche *il silenzio* (assenza di enunciazione).

L'analisi del ruolo dell'insegnante nell'interazione si svolge secondo una metodologia ben precisa che può essere così riassunta:

- 1) definire una particolare intenzione;
- 2) descrivere a priori alcune possibili strategie comunicative;
- 3) isolare nel protocollo sperimentale alcuni momenti significativi in cui è individuabile l'intenzione;
- 4) individuare la strategia comunicativa adottata;
- 5) valutare l'esito presso l'allievo (gli allievi) come effetto della strategia comunicativa.

Se l'esito è quello atteso, si conferma la validità della strategia in quel particolare contesto educativo.

Una delle strategie comunicative studiate in modo più approfondito dalla Lumbelli è il **rispecchiamento**, importato nella ricerca educativa dalla pratica psicoanalitica di intervista. Dedichiamo ad esso qualche spazio, per l'importanza che esso assume anche nella nostra ricerca.

Il rispecchiamento è studiato, ad esempio, nel contesto educativo dell'interrogazione, in relazione all'intenzione di saperne di più, cioè di *ottenere dall'allievo una riformulazione di discorsi già proposti allo scopo di riceverne informazioni più complete e/o meno ambigue circa il suo pensiero*. Questa intenzione, facilmente riconoscibile nel contesto educativo dell'interrogazione, si può applicare anche in molti casi di discussione, quando l'insegnante intende ottenere una formulazione migliore di un intervento, anche per favorire la comunicazione con i compagni.

L'analisi a priori delle strategie comunicative utilizzabili in relazione a questa intenzione mette in evidenza molte possibilità che sono riassunte nella tabella allegata.

La ricerca sperimentale mostra che l'intenzione è realizzata più facilmente a mano a mano che si scende nella tabella: le domande dirette e le richieste di spiegazione sono inefficaci, perché bloccano l'allievo; le domande d'aiuto di tipo a) b) c) possono essere efficaci (provocano cioè una reazione) ma poco indicative; l'efficacia maggiore si ha con le domande aperte, ma soprattutto con le diverse tecniche di rispecchiamento.

L'analisi della comunicazione condotta da Lucia Lumbelli è molto interessante per la nostra ricerca: essa può essere facilmente inserita in una analisi dell'attività di insegnamento - apprendimento della matematica ispirata a Leont'ev (**# ATTIVITA', AZIONI, OPERAZIONI**), date le corrispondenze tra i livelli:

motivi dell'attività - opzioni di base
scopi delle azioni - intenzioni
operazioni - strategie comunicative.

La Lumbelli tuttavia non si fa carico della specificità del sapere (matematico) e anzi dichiara che le ricerche sperimentali da lei svolte non suggeriscono la necessità di operare distinzioni in questo senso.

Nella nostra ricerca, abbiamo quindi dovuto introdurre altre possibili strategie comunicative, collegate ai motivi dell'attività, che comprendono nel nostro caso anche oggetti specifici del sapere matematico. Questa scelta è coerente con l'impianto metodologico interpretativista, che considera le categorie di analisi come prodotti (e strumenti) della ricerca e non come schemi completi assegnati a priori.

TABELLA		
1) DOMANDA DIRETTA		(es. che cosa vuol dire?)
2) RICHIESTA DI SPIEGAZIONE		(es. cerca di esprimerti meglio)
3) DOMANDA D'AIUTO	a) completamento	(richiesta di completare una frase interrotta)
	b) suggestiva	(con valutazione implicita ad es. nel tono)
	c) chiusa	(con risposta SI o NO)
	d) aperta	(invito a riorganizzare il discorso, es. riproponendo una parte del discorso con in più una domanda)
4) RISPECCHIAMENTO	ripresa di un contributo informativo presente in una battuta senza aggiungervi una propria valutazione esplicita, ma, eventualmente, modificandone parzialmente la formulazione.	
	a) eco	(ripetizione di un intervento breve)
	b) ricapitolazione	(riassunto di più interventi)
	c) informazione	(rispecchiamento con integrazione)

11. Analisi di alcune intenzioni particolari.

Esistono intenzioni generali dell'insegnante che non sono legate al singolo oggetto del sapere in gioco nelle diverse discussioni (per cui è richiesta una analisi locale), ma che sono comuni a tutte le discussioni, perché parte dei motivi dell'attività di insegnamento - apprendimento della matematica. Ad esempio:

- 1) il linguaggio come strumento del pensiero;
- 2) la cultura del progresso scientifico come costruzione sociale;
- 3) il genere di discorso dell'istituzione scolastica.

Analizziamo ora brevemente questi esempi, per mostrare come nel corso del dibattito l'insegnante può intenzionalmente (e col tempo istintivamente) ricorrere a costellazioni di strategie comunicative coerenti con essi.

11.1. L'intenzione di far usare il linguaggio come strumento del pensiero.

Questa intenzione è chiaramente collegata al ruolo funzionale attribuito da Vygotskij allo sviluppo del linguaggio. Essa si realizza nei nostri esperimenti didattici attraverso alcune scelte generali:

- 1) la proposta di un modello di soluzione dei problemi spaziali che mette in gioco contemporaneamente l'azione diretta, la visione e il linguaggio, al fine di favorire la costruzione (per interiorizzazione) del # CAMPO VISIVO INTERNO, nel quale il bambino può usare la funzione pianificatrice del linguaggio;

- 2) la richiesta sistematica di accompagnare la soluzione dei problemi con accurate verbalizzazioni del processo e commenti individuali;
- 3) la proposta sistematica di discussioni;
- 4) l'analisi retrospettiva dei protocolli di discussione guidata dall'insegnante;
- 5) la lettura guidata con interpretazione di testi selezionati ecc.

Queste scelte generali guidano la pianificazione degli esperimenti didattici. Ma l'insegnante costruisce anche nel corso delle discussioni il linguaggio come strumento del pensiero:

- (a) prestando all'allievo termini e locuzioni che lo aiutano a meglio esprimere il suo pensiero;
- (b) aiutandolo a prendere coscienza dei significati cristallizzati in certe parole e espressioni più complesse es. punto-di-vista).

11.2. La cultura del progresso scientifico come costruzione sociale.

Una delle radici del pensiero scientifico moderno sta nel profondo mutamento delle ideologie sulla scienza che si realizzò nei secoli XVI-XVII e che appare ancora presente nella cultura del mondo contemporaneo.

Che la scienza sia una lenta costruzione non mai finita alla quale ciascuno, nei limiti delle sue forze e delle sue capacità, può portare il suo contributo; che al progredire della scienza sia essenziale la collaborazione e la cooperazione [...]; che la ricerca scientifica abbia come fine non il vantaggio di una singola persona o razza o gruppo, ma quello dell'intero genere umano, che in ogni caso lo sviluppo o la crescita della ricerca stessa sia qualcosa di più importante delle persone singole che la pongono in atto: queste, oggi diventate verità di senso comune, sono alcune fra le componenti essenziali di una considerazione della scienza che ha precise origini storiche. Essa è assente nelle grandi concezioni religiose dell'Oriente, nell'antichità classica, nella Scolastica medievale. Viene alla luce in Europa, come il più tipico prodotto della civiltà occidentale moderna, fra la metà del Cinquecento e la metà del Seicento.

(Rossi, *I filosofi e le macchine*, 1971, p. 68)

Questa concezione è uno degli oggetti dell'attività di insegnamento - apprendimento: essa viene realizzata attraverso scelte generali del tipo:

- 1) la valorizzazione dell'attività collettiva nella classe;
- 2) il ricorso critico a fonti esterne che rappresentano la cultura esistente;
- 3) la periodica ricostruzione storica del processo di apprendimento del singolo allievo, del gruppo classe e del gruppo sociale di cui si è parte.

Nel concreto delle discussioni, questo si realizza attraverso:

- a) strategie di apertura, in cui l'insegnante ricostruisce la storia della classe in relazione al tema che si dibatte;
- b) strategie di rilancio della discussione in cui l'insegnante fa il punto di alcuni contributi individuali, inserendoli nell'economia generale del processo collettivo;
- c) ricorso intenzionale all'uso del *noi* per esprimere conquiste collettive;
- d) sottolineatura di cambiamenti e di evoluzioni di strategie, come modi necessari di avvicinare un dato elemento di conoscenza.

11.3. Il genere di discorso dell'istituzione scolastica.

L'istituzione scolastica adotta, per la sistemazione della conoscenza da trasmettere, un # **GENERE DI DISCORSO** che è caratterizzato da alcuni elementi di **generalizzazione**:

- 1) decontestualizzazione;
- 2) detemporalizzazione;
- 3) depersonalizzazione.

Ciò significa che un elemento del sapere è separato dal contesto in cui è stato costruito (ad esempio una particolare situazione problematica), dal tempo nel quale è stata organizzata la sua costruzione (ad esempio, l'organizzazione logica sostituisce la emergenza di una successione cronologica) e dalla persona che l'ha costruito. Naturalmente queste caratteristiche non si presentano immediatamente all'allievo, che opera in un contesto e in un tempo dato.

L'insegnante costruisce per l'allievo il genere di discorso dell'istituzione organizzando un percorso in cui trovano spazio anche testi già strutturati in questo modo, da interpretare insieme all'allievo, da confrontare con testi prodotti dall'allievo in situazioni fortemente contestualizzate.

Nel corso delle discussioni, poi, l'insegnante ricorre intenzionalmente alla strategia della **parafrasi** (diversa dal rispecchiamento) per riprendere un contributo offerto da un allievo e trasformarlo. Questo avviene quando si introducono esplicitamente quantificatori universali (*tutti, ognuno, per ogni...*), quando si sostituisce il connettivo temporale *quando* con il *se* ipotetico (vedi esempi in Bartolini Bussi & Boni, 1995).

Si possono avere ovviamente due tipi di parafrasi:

- 1) di **generalizzazione** (dal contestualizzato al decontestualizzato, ecc.);
- 2) di **particolarizzazione** (dal decontestualizzato al contestualizzato, ecc.).

Questo secondo tipo di parafrasi ha, da un lato, lo scopo di riportare nella discussione anche quella fascia di allievi medio-bassi che possono essere esclusi quando il discorso assume un carattere di generalizzazione; dall'altro, lo scopo di proporre agli allievi il modello del doppio movimento che consente di realizzare la dialettica cognitiva (vedi § 8).

12. Il ruolo dell'insegnante nelle singole fasi di una discussione di bilancio.

(a) Il *vero bilancio* è introdotto dall'insegnante, di solito attraverso la proposta di un prototipo per ciascuna delle classi di elaborati individuali già identificata. Le modalità possono variare: ad esempio, se gli elaborati sono disegni (in molti casi degli esperimenti sulla rappresentazione prospettica del mondo visibile) essi sono semplicemente appesi alla parete; se sono soluzioni di problemi verbali, essi sono presentati dagli autori chiamati dall'insegnante. Poi tutti gli allievi sono invitati a riconoscersi in uno degli elaborati, questa procedura può presentare difficoltà, specialmente con gli allievi più giovani: a livello di primo ciclo, l'insegnante *aiuta* gli allievi a compiere questo *distanziamento* dal proprio prodotto, negoziando con loro quali sono gli elementi importanti su cui focalizzare l'attenzione. Poi le diverse strategie sono discusse, controllate e valutate collettivamente. In questa fase l'insegnante spesso sottolinea non solo le convergenze ma anche i *conflitti* tra due soluzioni diverse *ricapitolando* i ragionamenti, per evitare che il conflitto non sia colto dalla classe; dà forma alla comunicazione, *prestando* espressioni adatte all'allievo che non le trova da solo, introducendo le *espressioni linguistiche corrette*, quando gli allievi si avviano ad accordarsi su un modo di dire che non è quello adottato dai matematici, etc. Con l'introduzione di questa fase l'insegnante vuole anche comunicare agli allievi un atteggiamento positivo nei confronti della *costruzione collettiva della conoscenza matematica* che si contrappone allo stereotipo diffuso del processo esclusivamente individuale e riservato ai pochi allievi dotati di ogni classe.

(b) La esplicitazione dei *processi di soluzione* è introdotta dall'insegnante attraverso la domanda: *quali difficoltà avete avuto?* Abbiamo verificato che non è sufficiente chiedere: *come avete fatto a costruire questa soluzione?* Gli allievi tendono a trascurare tutti i tentativi andati a vuoto, o perché non li giudicano più importanti o perché non desiderano esplicitare le piste false seguite. In realtà proprio questi sono interessanti per costruire il significato delle strategie risolutive anche attraverso il confronto con strategie meno efficaci o scorrette. L'insegnante aiuta gli allievi in questa ricostruzione non semplicemente con domande dirette (la domanda diretta non

è sempre un modo efficace per raccogliere informazioni sui processi mentali raggiungibili attraverso l'introspezione) ma attraverso tecniche diverse, tra cui i diversi tipi di *rispecchiamento* (ripetizione di un intervento) giocano un ruolo particolare. Con l'introduzione di questa fase, l'insegnante vuole anche comunicare agli allievi un atteggiamento positivo nei confronti dell'errore visto non come deviazione ma come tappa necessaria della costruzione della conoscenza.

(c) La esplicitazione dell'*apprendimento* è introdotta dall'insegnante attraverso la domanda: *che cosa abbiamo imparato con questo problema?* La focalizzazione in questa fase è sulle novità introdotte rispetto alle conoscenze già consolidate. Gli allievi sono invitati a *generalizzare* la strategia risolutiva per distaccarsi dal particolare problema considerato e poterla applicare ad una classe più ampia. L'insegnante *aiuta* gli allievi in questa costruzione *parafrasando* le loro strategie attraverso l'inserimento di *quantificatori universali* (*ogni volta che, tutti, ecc.*). Le strategie più generali così costruite devono poter essere *particolarizzate* e riapplicate a nuovi problemi. L'insegnante *aiuta* gli allievi in questo processo *parafrasando* gli enunciati generali con riferimento a casi particolari (*vediamo come funziona nel caso che...*). Con l'introduzione di questa fase l'insegnante vuole anche comunicare agli allievi che il problema *ha avuto un effetto sull'apprendimento* ed è quindi una tappa importante nella vita della classe come comunità; vuole indurre una riflessione sulla propria storia individuale e collettiva. Questa fase è tanto importante che a volte costituisce l'oggetto di una intera discussione attraverso la analisi guidata di una selezione di elaborati individuali o di trascrizioni di discussioni collettive riferite a tempi diversi (in questo caso parliamo di *metadiscussione*).

(d) La *istituzionalizzazione* dell'apprendimento è affidata all'insegnante, riconosciuto rappresentante della cultura matematica nella classe. Questa fase viene introdotta tutte le volte che il processo di discussione precedente ha fatto convergere gli interventi su una (o più di una) strategia risolutiva accettabile da un punto di vista adulto. Nei casi in cui questo è impossibile (ad esempio la maggioranza degli allievi sembra accordarsi su una soluzione non accettabile da un punto di vista matematico, magari per le migliori capacità argomentative di un allievo che ha prodotto una soluzione sbagliata) l'insegnante sospende l'istituzionalizzazione, eventualmente proponendo controesempi, ma comunque dichiarando che si tratta di un problema ancora non maturo su cui sarà necessario ritornare. Abbiamo verificato che l'accettazione di periodi anche lunghi di *incertezza* è non solo necessaria ma possibile, anche se inizialmente può creare qualche problema. Nei tempi lunghi l'insegnante costruisce una *cultura di classe* che viene esplicitata dagli allievi come un gioco di ruoli; in quarta o quinta elementare gli allievi dicono: *sappiamo che tu sai la risposta ma non ce la devi dire perché la dobbiamo costruire da soli*.

È importante chiarire che cosa intendiamo per soluzione accettabile da un punto di vista matematico: non è sempre necessario che la soluzione sia espressa nei termini della sistemazione attuale della matematica; si possono accettare soluzioni che rispecchiano modi di intendere documentati come tappe necessarie nella costruzione del sapere (vedi # OSTACOLO EPISTEMOLOGICO). Esistono *discontinuità* nella costruzione della conoscenza, che si traducono in conquiste necessariamente temporanee di certi strumenti, da rimettere in discussione di lì a qualche mese. La funzione giocata in questo caso dalla *metadiscussione* è fondamentale, poiché consente l'esplicitazione delle conoscenze costruite nel tempo e dei legami tra esse, a volte di *sviluppo continuo*, a volte di *rottura*. Così, ad esempio, la presenza della linea di base nel disegno dal vero è una tappa necessaria nella costruzione della rappresentazione in prospettiva, che può essere ritrovata anche nello sviluppo storico: essa è una prima soluzione (non definitiva ma *accettabile* in seconda elementare). L'accettazione implicita di tale soluzione da parte dell'insegnante (che definisce *bellissimi* tutti i prodotti che la contengono anche se non li istituzionalizza come modelli

di riferimento per tutta la classe) è sensata se inserita in una cultura di classe in cui le discontinuità di costruzione della conoscenza sono oggetto di riflessione specifica.

La descrizione di un canovaccio di discussione di bilancio non può essere molto più dettagliata, se non si fa riferimento ad un problema particolare: l'*oggetto del sapere* in gioco, diverso da problema a problema, fornisce indicazioni molto più precise sui ruoli giocati dall'insegnante nelle varie fasi.

Gli effetti del canovaccio qui illustrato si osservano nel breve e nel lungo termine.

Nel *breve termine*, il canovaccio struttura la discussione, costruendo un ordine in una interazione di grande gruppo che rischierebbe altrimenti di essere confusa e poco produttiva.

Nel *lungo termine*, la partecipazione dell'allievo a discussioni con canovacci simili viene *interiorizzata* come schema per la verbalizzazione individuale delle soluzioni dei problemi, attraverso l'esplicitazione dei processi di soluzione (spesso in forma dialogica: *mi sono chiesto...*), dei tentativi andati a vuoto, dei commenti su generalizzazioni di strategie a classi più ampie di problemi. Anche la qualità della partecipazione alle discussioni cambia. Gli allievi entrano in un # **GENERE DI DISCORSO** nel quale anche le richieste dell'insegnante sono interpretate in modo non letterale: così, se l'insegnante chiede *avete finito? come è andata?* gli allievi cominciano immediatamente a descrivere per quali vie sono arrivati alla soluzione; oppure ricostruiscono spontaneamente la storia del loro apprendimento. Alla fine della scuola elementare, dopo anni di questa tradizione, l'insegnante può cedere il controllo di una parte della discussione: alcuni allievi sono in grado di giocare i ruoli giocati di solito dall'insegnante; spontaneamente gli allievi voltano le spalle all'insegnante escludendolo dal loro cerchio.

13. Il ruolo dell'insegnante nelle singole fasi di una discussione di concettualizzazione.

(a) L'*apertura* è introdotta dall'insegnante, attraverso una domanda diretta: *che cosa vuol dire ...? che cosa significa.....?* o indiretta: *perché molti di voi hanno usato questa parola?* In questa fase l'insegnante negozia il contratto della discussione, eventualmente ricordando una situazione particolare in cui la parola (o la locuzione) è stata utilizzata in modo significativo.

(b) La esplicitazione dei *sensi personali* da parte degli allievi porta alla produzione di testi verbali (eventualmente accompagnati da disegni alla lavagna o da gesti espliciti) che di solito si riferiscono ad esperienze precedenti, tutte riconducibili, secondo il soggetto, sotto l'unico 'ombrello' della parola o della locuzione in questione. Si hanno spesso in questa fase verbalizzazioni del tipo: *vuol dire che...come quando.....; per esempio, è* In questa fase l'insegnante accetta tutte le proposte degli allievi, cercando rapidamente di confrontarle, nella sua mente, con le caratteristiche del significato da istituzionalizzare. Nel caso di allievi che si interrompono *rispecchia* il loro enunciato ad eco con l'intenzione di saperne di più. Nel caso di allievi con difficoltà ad esprimersi *presta* espressioni linguistiche corrette, il più possibile adeguate al pensiero dell'allievo, senza entrare in valutazioni di pertinenza.

(c) La costituzione dei *significati* viene guidata dall'insegnante con una tecnica particolare: quando un allievo fornisce con chiarezza un esempio pertinente che contiene in sé i nessi e le relazioni tra le cose che sono il fondamento genetico del concetto matematico, l'insegnante *parafrasa* sul piano generale l'enunciato, sostituendo alle determinazioni concrete espressioni più generali (uso di termini generali come *oggetto, cosa*, al posto di un oggetto concreto; introduzione di *quantificatori universali*; introduzione di *pronomi indefiniti* ecc.). Questa fase costituisce anche una introduzione degli allievi al # **GENERE DI DISCORSO** dell'istituzione scolastica, nel quale il processo di generalizzazione ha una funzione rilevante.

(d) La *dialettica* tra sensi personali (costruiti a partire dall'esperienza) e significati (costruiti insieme all'insegnante) viene realizzata dall'insegnante in modo esplicito, invitando gli allievi a produrre enunciati che non si riferiscono a casi particolari (dal senso al significato) e a produrre altri esempi dello stesso significato (dal significato ad un senso personale potenziale). In questa fase si diffonde *tra gli allievi stessi* il processo che avviene di solito tra adulto e bambino, nel quale la stessa parola si usa con riferimento agli stessi oggetti, ma attraverso processi mentali diversi. Attraverso questa dialettica si crea una # **ZONA DI SVILUPPO PROSSIMALE**, nella quale progressivamente gli allievi fissano *il nesso del generale col particolare* (vedi # **CONOSCENZA EMPIRICA - CONOSCENZA TEORICA**). Questa dialettica consente anche di trattenere attivi nella discussione gli allievi di livello modesto o con tempi più lunghi di elaborazione personale.

(e) La *istituzionalizzazione* è condotta dall'insegnante sia con lo stabilire (valutazione) che certi nessi sono pertinenti, sia con l'esplicitare i significati, attraverso loro formulazioni linguistiche, che sono poi registrate in forma scritta sui quaderni individuali.

La descrizione di un canovaccio di discussione di concettualizzazione non può essere molto più dettagliata, se non si fa riferimento ad un problema particolare: l'*oggetto del sapere* in gioco, diverso da problema a problema, fornisce indicazioni molto più precise sui ruoli giocati dall'insegnante nelle varie fasi.

Gli effetti a breve termine si ritrovano:

- (a) nella struttura stessa della discussione;
- (b) nella comparsa di processi dialettici nei contributi di singoli allievi;
- (c) nello spostamento di una parte consistente di allievi verso la produzione di enunciati generali.

Gli effetti a lungo termine si ritrovano:

(a) nella stabilizzazione del significato (socialmente condiviso) come espressione cristallizzata dei sensi personali attribuiti dagli allievi ad una particolare attività, questo implica, per esempio, la possibilità di richiamare alla memoria, attraverso la parola o la locuzione che lo rappresenta, il processo che ha portato all'espressione del senso nel significato. Anche se il significato è cristallizzato in una 'definizione', ciò che viene richiamata è tutta l'immagine concettuale (§ 8.1).

(b) nella graduale conquista del genere di discorso dell'istituzione scolastica, caratterizzato dalla generalizzazione (decontestualizzazione, depersonalizzazione, detemporalizzazione).

14. L'analisi fine della discussione.

14.1. Generalità.

La metodologia di analisi della discussione a posteriori si basa su un attento studio del protocollo di discussione. Tale protocollo è, di norma, redatto dallo stesso insegnante attraverso la sbobinatura della discussione.

Vi sono alcuni dati quantitativi che danno un'prima impressione sull'andamento della discussione: il numero degli interventi dell'insegnante e quello dei singoli allievi.

Nelle discussioni condotte da insegnanti esperti il numero degli interventi dell'insegnante è generalmente minore che in quelle condotte da insegnanti del tutto inesperti. Ricordiamo che tale dato, da noi riscontrato puntualmente, è coerente con i dati di altri ricercatori (vedi ad esempio il capitolo 7 del già citato libro di Pontecorvo e altri) riassunti nella famosa regola di Flanders sulla comunicazione a scuola:

- (a) per circa due terzi del tempo si parla;
- (b) circa due terzi di questo discorso è dell'insegnante;
- (c) circa due terzi del discorso dell'insegnante è costituito da lezioni o formulazione di domande.

ESEMPIO

Discussione di bilancio di disegni dal vero
di un 'paesaggio' in miniatura (vedi § 2.3.4)

Ins.: Faccio una domanda. Il disegno di Marco è diverso dagli altri, ha messo una cosa che pochi han messo, cos'è?

Marco: Io ci ho fatto il pezzo di destra [della casa] e quelli invece no.

[si riferisce al fatto che altri compagni hanno rappresentato solo una facciata della scatola-casa]

Ins.: Quante facciate hai disegnato?

Marco: Quante?!

Ins.: Quante facciate [si aiuta col gesto] della casa hai disegnato?

Marco: Due.

Diego: Due.

Francesca: Ah [con disappunto], una.

Ingrid: Io? Una.

Elisa: Una.

Ins.: Dal vostro posto, quante facciate vedete?

Gabriele: Una.

Francesca: Maestra! Maestra!

[forse vuole intervenire perché Gabriele ha disegnato tre facciate]

Ins.: Aspetta, Francesca. Gabriele vai a segnarle.

[Gabriele va e tocca tutte le facciate girando intorno al disegno].

Gabriele resta al tuo posto, sì, ora vai a toccare le facciate che vedi da qui. Quali facce vedi? Si queste sono le facce.. quante ne vedi?

Gabriele: Quattro! [continuando a muovere la testa per sporgersi a vedere].

Ins.: Se ne vedi quattro, seguì me: io le tocco, una dopo l'altra.. dimmi quante ne vedi.

Gabriele: Tre.

Ins.: Ma da qui, sai, contale!

Gabriele: Eh, eh...

Giusi: Io ne vedo due.

Elena: Una.

Ingrid: Due.

Claudio: Due.

Elisa: Due.

Marco: Due.

Laura R.: Due.

Ins.: Laura S. E tu quanti muri vedi?

Laura S.: Uno.

Gabriele: Io ne vedo due!

Ins.: bravo, I muri che vede Gabriele sono i muri che vede Luana?

Laura R.: No perché la Luana non è di fianco a Gabriele e non vede quello che vede lui.

Ins.: Chi è d'accordo con Laura? Ah, quasi tutti.

Ingrid: Gabriele è a sinistra e Luana è a destra.

Ins.: vorrei sapere da Gabriele, che ha disegnato un bel cavallino, se lo vedeva bene.

Gabriele: No, non lo vedo.

Ins.: Che cosa avevo detto di disegnare?

Greta: Quello che vedete.

Ins.: Ma i vostri disegni sono tutti uguali!

Ingrid: Noi ci siamo sbagliati, solo Marco ha fatto esatto.

[...]

L'insegnante esperto è disposto a concedere più spazio agli allievi, perché

- (1) sa che questo momento di espressione è fondamentale;
- (2) sa che può in ogni momento controllare senza ansia il corso della lezione per mezzo delle conoscenze acquisite nel corso dell'analisi a priori;
- (3) sa che dispone di un repertorio di strategie comunicative (il rispecchiamento, la parafrasi ecc.) più ampio e diversificato a seconda delle intenzioni.

Così può accadere che anche l'insegnante esperto ricorra al ping-pong di botta e risposta (vedi esempio) in una situazione in cui il suo ruolo di guida è da giocare fino in fondo, per poi tornare a conduzioni più distese in cui i turni di discorso sono per periodi più lunghi affidati agli allievi.

Quando l'insegnante comincia ad entrare con convinzione nel progetto di discussione si assiste di solito ad un calo drammatico del numero di interventi: la paura di interferire con il processo degli allievi (e il ricordo delle 'cattive' gestioni precedenti) lo rende praticamente muto. È un periodo transitorio che è da accettare come 'fisiologico' nella ricerca personale di equilibrio.

Naturalmente i dati quantitativi forniscono solo una prima idea dello sviluppo della discussione. Ci possono mostrare una diversa frequenza di interventi dell'insegnante in episodi diversi della discussione (suggerendo quindi una analisi più approfondita delle ragioni di tali differenze), ci possono mostrare la polarizzazione della discussione su un numero limitato di allievi (di livello alto?). Tuttavia non ci danno ancora le informazioni più significative.

Possiamo raffinare l'analisi, affrontando una analisi qualitativa delle singole enunciazioni (o silenzi, intesi come assenza di enunciazione) inserite nel contesto della discussione.

Una prima analisi, riferita agli allievi, evidenzia dati relativi:

- alla attenzione (o mancanza di attenzione);
- alla disponibilità (o mancanza di disponibilità) a prendere parte alla discussione;
- alla disponibilità (o mancanza di disponibilità) a collaborare ad un progetto collettivo;
- alla pertinenza (o mancanza di pertinenza) degli interventi prodotti.

Tali dati ci forniscono informazioni sulla appropriazione da parte degli allievi del **#** **GENERE DI DISCORSO** della discussione. La loro presenza positiva costituisce una sorta di condizione necessaria, ma non sufficiente, perché la discussione sia un ambiente favorevole all'apprendimento. Il complesso di tali dati non permette ancora di entrare nel cuore del processo di apprendimento, poiché essi sono riferibili a caratteristiche formali del discorso oppure a caratteristiche generali di atteggiamento dell'allievo, piuttosto che all'oggetto del sapere in gioco. Proprio perché generici, essi si possono applicare a discussioni decontestualizzate: la lettura in sequenza dei dati relativi ad uno stesso allievo permette di controllare l'evoluzione di solo alcune delle variabili legate alla introduzione di fasi collettive nell'attività scolastica.

Una analisi più fine è ovviamente legata ai motivi dell'attività di insegnamento-apprendimento (vedi **# ATTIVITÀ AZIONI OPERAZIONI**), cioè a quegli oggetti matematici (concetti procedure atteggiamenti ecc.) alla cui appropriazione è finalizzata l'attività.

L'analisi quindi dipende dai motivi dell'attività (di lungo termine) del singolo progetto. Nel nostro progetto abbiamo privilegiato dei motivi di carattere generale (il linguaggio come strumento del pensiero § 11.1; la costruzione sociale del sapere § 11.2; il genere di discorso dell'istituzione scolastica § 11.3) e motivi di carattere specifico legati all'oggetto particolare del sapere in gioco (che saranno dettagliati nel prossimo capitolo in relazione ai singoli esperimenti didattici). Ciò che interessa l'analisi è l'appropriazione dei motivi da parte degli allievi, espressa da indicatori quali, per ciascuno dei motivi di carattere generale:

1) la presenza (in tempo reale o evocata) di dialoghi con se stesso; la presenza di controlli esercitati attraverso il linguaggio (interruzione di una frase per evidente cambiamento di idea; sostituzioni di termini con altri più precisi; pianificazione anticipata,) ecc.;

2) la presenza di enunciazioni 'per ricordare insieme'; il riepilogo di interventi; la presenza del 'noi' riferito alla classe; la ricostruzione della storia del proprio cambiamento; la individuazione di relazioni con il sapere già costruito ecc.;

3) la presenza di parafrasi (di generalizzazione o di particolarizzazione); l'uso di modi tipici di enunciazione.

I motivi specifici legati al sapere in gioco richiedono una accurata analisi locale.

Naturalmente una diversa individuazione dei motivi dell'attività porta ad una diversa analisi (un esempio in tal senso è nell'articolo di P. Boero in appendice a Bartolini Bussi & Boni 1995).

L'analisi del ruolo dell'insegnante è condotta anch'essa con riferimento ai motivi ed alle intenzioni ad essi correlate. Per ogni atto comunicativo (enunciazione o silenzio) dell'adulto si individua l'intenzione (o una delle intenzioni) in quel momento dell'interazione e si studia poi, da un lato, la congruenza con l'atto comunicativo, dall'altro l'effetto sul processo di interazione.

14.2. Guida operativa.

Dopo avere svolto in classe la discussione, con il registratore e l'annotazione diretta di particolari significativi non ricostruibili dalla sola voce, si affronta il duro lavoro della sbobinatura. Solo sul protocollo trascritto sarà possibile compiere gli andirivieni che consentono l'analisi accurata della discussione.

L'insegnante ricostruisce il legame tra la particolare discussione ed i motivi dell'attività; ricostruisce la costellazione di intenzioni che ritiene aver guidato i suoi interventi.

Suddivide poi la discussione in episodi: un episodio è costituito da una sequenza di enunciazioni consecutive dedicate allo stesso tema e caratterizzate dalla stessa forma; un nuovo episodio è introdotto (di solito dall'insegnante, ma, nelle classi esperte, anche da uno degli allievo) quando viene modificato il tema oppure la forma del discorso (es. porre un problema, proporre una soluzione, collegare, ricapitolare, ricordare insieme ecc.).

Analizza poi la rete di connessioni tra gli episodi fino all'individuazione di sotto-discussioni su temi particolari.

Analizza poi il percorso di ogni singolo allievo nella discussione cercando gli indicatori dell'appropriazione dei motivi individuati.

Analizza la congruenza tra le intenzioni, le strategie comunicative messe in opera e il processo di interazione, con riferimento al ruolo dell'insegnante.

Esempi di analisi di questo tipo sono contenute negli articoli Bartolini Bussi 1991a e 1991b, Bartolini Bussi & Boni 1995.

15. La metodologia della ricerca.

La ricerca qui presentata pone in primo piano come protagonisti gli insegnanti che sono i principali responsabili della riuscita o dell'insuccesso di un progetto di innovazione.

Gli insegnanti non sono *oggetti da osservare* o *esecutori materiali* di progetti pensati da altri (l'ipotetico responsabile scientifico). Gli insegnanti partecipano a tutti gli effetti a tutte le fasi della ricerca:

1) la definizione progressiva di un quadro di riferimento teorico in grado di fornire strumenti di interpretazione dei fenomeni osservati;

2) la definizione a grandi linee del percorso, basata su una analisi epistemologica del sapere in gioco, in relazione agli obblighi istituzionali dell'insegnante (es. programmi);

3) la pianificazione delle modalità di attuazione nella classe;

- 4) la sperimentazione nella classe;
- 5) la raccolta dei dati significativi (dati iniziali sugli allievi, protocolli individuali, protocolli di discussione - sbobinature -, informazioni su ricadute esterne del percorso, ecc.) e la loro organizzazione (tabelloni del percorso di classe centrati sui singoli allievi);
- 6) l'analisi di tali dati in relazione all'analisi epistemologica iniziale;
- 7) la revisione del percorso iniziale e la sua strutturazione minima per nodi cruciali irrinunciabili;
- 8) la personalizzazione del percorso nella propria classe con inserimento di problemi aggiuntivi diversificati;
- 9) l'esplorazione di piste nuove che rispondono a particolari problemi di ricerca;
- 10) la stesura di rendiconti ad uso interno o esterno (articoli per riviste professionali o di ricerca didattica; interventi in corsi di aggiornamento, comunicazioni a seminari, convegni nazionali ed internazionali).

Anche se il gruppo offre supporto alle diverse fasi, la partecipazione dei singoli avviene attraverso un inserimento graduale nella ricerca che richiede un grosso impegno individuale di studio (matematica, psicologia, didattica ecc.), di attenzione (raccolta dei dati), di sistematicità (stesura di rendiconti).

L'inserimento di nuovi insegnanti nel gruppo è per ora avvenuto 'a piccole dosi'. La possibilità di estendere questo lavoro dipende dalla fruibilità del contenuto di questo libretto e dalla disponibilità individuale ad affrontare il complesso, lungo e faticoso processo dell'autoanalisi nella gestione dell'attività di classe.

Capitolo 2

Esperimenti didattici.

1. Gli esperimenti didattici.

1.1. Introduzione.

In questo capitolo ci proponiamo di presentare brevemente due esperimenti didattici che sono stati proposti in numerose classi su:

- a) **coordinamento dei punti di vista** nel primo ciclo della scuola elementare;
- b) **rappresentazione del mondo visibile attraverso il disegno geometrico in prospettiva** nel secondo ciclo della scuola elementare (e in alcune classi di scuola media).

I due esperimenti di lungo termine sono organizzati sequenzialmente, anche se è possibile introdurli nella classe in modo relativamente indipendente: entrambi si collocano, per l'allievo, nel campo di esperienza del **disegno dal vero** con fini di verosimiglianza.

La realizzazione di questi esperimenti ha tratto profitto da altri esperimenti realizzati in precedenza in classi del secondo ciclo elementare su: **l'infinito, il volume, i grafici cartesiani**, nei quali la discussione matematica era sistematicamente alternata con i compiti individuali. Questi esperimenti sono stati tutti pubblicati in italiano, nella rivista *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. Ci limitiamo a ricordare brevemente i principali risultati di questi esperimenti. I lettori interessati ad approfondire potranno fare riferimenti agli articoli integrali.

1. 2. L'esperimento sull'infinito.

(M. Bartolini Bussi, La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Parte II: analisi di due casi, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 12, 615-654).

Questo esperimento è stato condotto nell' a. s. 1987/88 (da gennaio a maggio) in una classe quarta dall'insegnante Franca Ferri. Hanno condotto in parallelo esperimenti parziali anche una classe terza (ins. Luisa Fiori), una quarta (ins. Carla Ronchetti) e due quinte (ins. Mara Boni e Silvia Salvini).

L'articolo contiene una breve analisi a priori del concetto di infinito, in relazione all'insegnamento nella scuola elementare: l'infinito nel linguaggio comune, nei programmi della scuola elementare, nei libri di testo e nella tradizione didattica e nella conoscenza matematica. Quest'ultimo punto consente di individuare alcuni ostacoli epistemologici a partire da una analisi storica dello sviluppo della matematica:

l'ostacolo dei punti materiali: un insieme limitato non può contenere infiniti elementi;
l'ostacolo della parte e del tutto: una parte è sempre minore del tutto;
l'ostacolo della misura e cardinalità: il numero di punti di un segmento è proporzionale alla lunghezza del segmento;

l'ostacolo del numerabile e del continuo: poiché infinito è ciò che non può essere ulteriormente accresciuto, c'è un solo tipo di infinito.

L'analisi consente, da un lato, di prevedere le difficoltà degli allievi e, dall'altro, di pianificare attività specifiche per il loro superamento.

L'esperimento consiste nella seguente alternanza di discussioni e problemi individuali:

1) discussione preliminare: *che cosa vuol dire infinito?*

2) prova individuale: *disegno libero per rappresentare l'infinito;*

3) prova individuale: *l'infinita divisibilità di un segmento;*

4) prova individuale: *confronto di parte (i numeri pari) e tutto (i numeri naturali);*

5) prova individuale: *confronto di due segmenti di diversa lunghezza;*

6) prova individuale: *confronto tra l'insieme dei punti di un segmento (continuo) e l'insieme degli estremi dei segmenti ottenibili attraverso dimezzamenti successivi (numerabile);*

7) discussione di bilancio sulle prove n. 3 e n. 5;

8) intervista scritta.

Le prove individuali sono state ricavate da un studio di Fischbein & al. pubblicato nel 1979.

I risultati ottenuti dagli allievi della classe sperimentale (quarta) sono sensibilmente migliori dei risultati documentati da Fischbein per classi quinte e seste (Israele).

L'articolo contiene una analisi retrospettiva dell'intera sequenza che analizza l'intreccio funzionale delle diverse concezioni di infinito emerse.

1. 3. L'esperimento sul volume.

(M. Bartolini Bussi. La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Parte II: analisi di due casi. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 12, 615-654)

Questo esperimento è stato condotto nell'a. s. 1987/88 (da febbraio a maggio) in una classe quarta dall'insegnante Mara Boni. Hanno condotto in parallelo esperimenti parziali anche due diverse classi quinte (ins. Silvia Salvini e Marta Malvezzi).

L'articolo contiene una breve analisi a priori del concetto di volume in relazione all'insegnamento nella scuola elementare: il volume nel linguaggio comune, nei programmi della scuola elementare, nei libri di testo e nella tradizione didattica e nella conoscenza matematica. Quest'ultimo punto consente di individuare alcuni ostacoli epistemologici a partire da una analisi storica dello sviluppo della matematica:

l'ostacolo volume-altra grandezza;

l'ostacolo capacità-volume;

l'ostacolo delle diverse sostanze;

l'ostacolo del rapporto di grandezze omogenee.

L'analisi consente, da un lato, di prevedere le difficoltà degli allievi e, dall'altro, di pianificare attività specifiche per il loro superamento.

L'esperimento consiste nella seguente alternanza di discussioni e problemi individuali:

1) discussione preliminare: *che cosa è il volume?*

2) prova individuale: *confronta il volume di due sassi;*

3) discussione di bilancio;

4) prova individuale: *confronta il volume di due contenitori;*

5) prova individuale: *confronta il volume di un sasso e di un liquido contenuto in un bicchiere;*

6) discussione di bilancio;

7) lezione: *introduzione dell'unità di misura convenzionale (cm^3);*

8) prova individuale: *trova il volume della scatola che è sul tavolo; che cosa succede se un (o più di un) lato raddoppia?*

9) intervista scritta.

Una parte delle prove individuali sono state ricavate da uno studio di Vergnaud e al. pubblicato nel 1983.

Quattordici allievi su quindici risolvono correttamente il problema finale, molto difficile, in quanto dipendente da una concezione tridimensionale del volume.

L'articolo contiene una analisi retrospettiva dei due modi di intendere il volume come una grandezza unidimensionale (cioè posta in relazione solo con altri volumi) e come una grandezza tridimensionale (cioè posta in relazione con lunghezze e aree) e del loro intreccio funzionale nel processo di classe.

1. 4. L'esperimento sui grafici nel piano cartesiano

(M. Bartolini Bussi, *Apprendere la matematica attraverso la discussione: grafici nel piano cartesiano*, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 14, 243-258 e 407-436).

Questo esperimento è stato condotto nell' a. s. 1988/89 (da febbraio a maggio) in una classe quinta dall'insegnante Franca Ferri.

L'articolo contiene una breve analisi a priori dei contenuti, che parte dalla lettura dei programmi della scuola dell'obbligo (elementare e media). I campi di contenuti riguardano i numeri negativi e i sistemi di riferimento cartesiani. Si sono individuati quattro ostacoli epistemologici:

l'ostacolo del numero come misura;

l'ostacolo dell'ampliamento numerico dai naturali agli interi;

l'ostacolo della separazione dei campi del sapere (es. aritmetica-algebra / geometria);

l'ostacolo della rappresentazione della realtà.

L'analisi consente, da un lato, di prevedere le difficoltà degli allievi e, dall'altro, di pianificare attività specifiche per il loro superamento.

L'esperimento consiste nella seguente alternanza di discussioni e problemi individuali:

1) discussione iniziale: *che cosa sono i numeri relativi?*

2) lettura collettiva di un testo dall'Enciclopedia Einaudi: *gli ampliamenti numerici*;

3) discussione di un problema: *interpretazione di un grafico tempo-spazio*;

4) prima prova individuale: *interpretazione di un grafico tempo-spazio*;

5) discussione di bilancio;

6) seconda prova individuale: *interpretazione di un grafico tempo-volume (capacità)*;

7) discussione di bilancio;

8) discussione di concettualizzazione: *che cosa è un grafico?*

9) metadiscussione: *a che cosa serve discutere?*

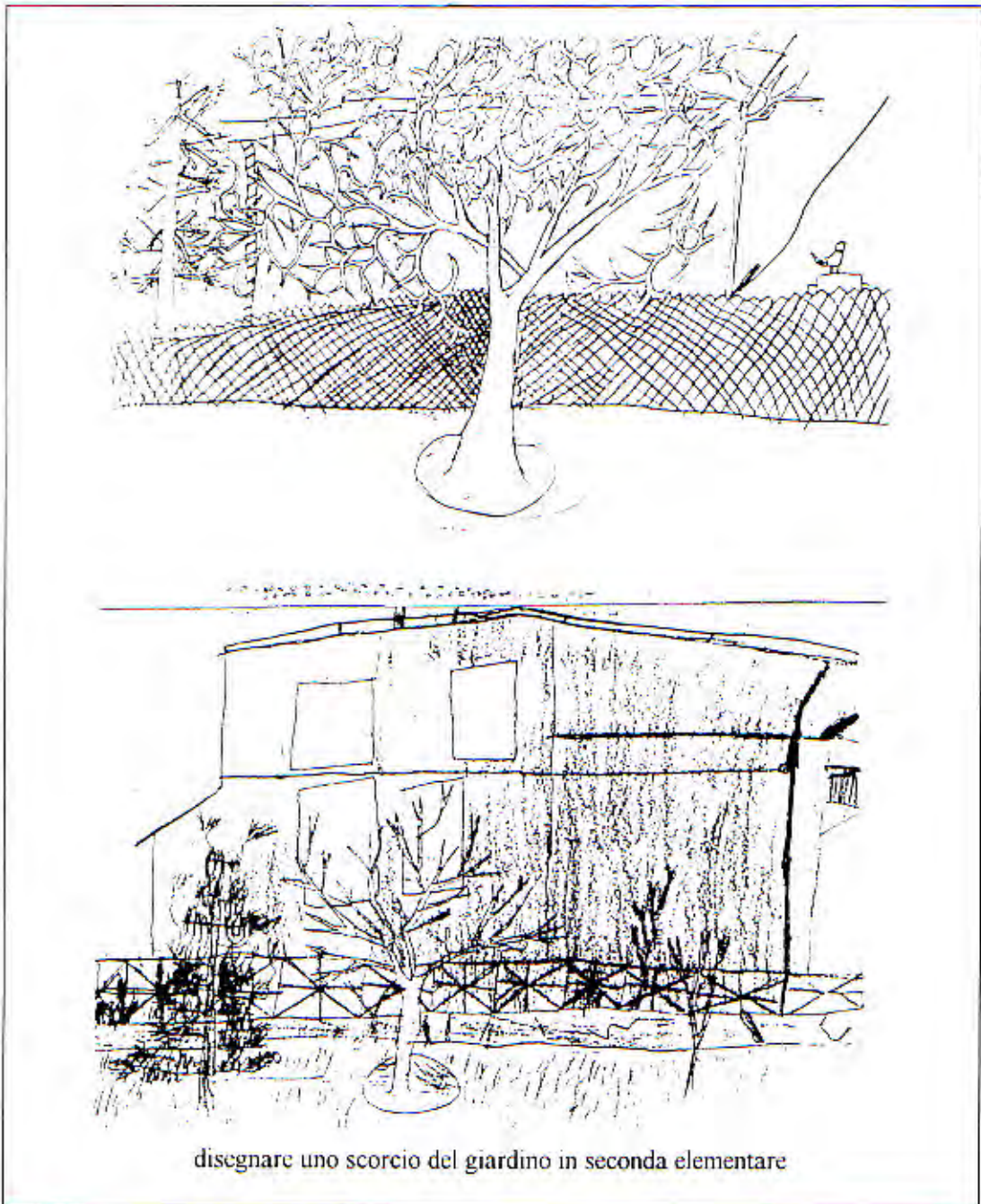
Nell'articolo sono discussi gli elementi di conoscenza procedurale (strategie di ordinamento degli interi; algoritmi per le operazioni tra interi; rappresentazione dei punti a coordinate intere nel piano cartesiano, interpretazione di un grafico come relazione tra due grandezze) e concettuale (indipendenza dal contesto; relazione tra concetti matematici; dialettica strumento-oggetto per un concetto matematico; rappresentazione), che sono costruiti nel corso dell'esperimento.

È anche discusso un significativo esempio di interiorizzazione relativo ad un allievo della fascia bassa della classe.

1. 5. Analisi retrospettiva dei primi esperimenti.

Questi primi esperimenti hanno costituito la 'palestra' in cui il lavoro successivo è stato sviluppato. Essi si sono svolti contemporaneamente alla costruzione del quadro di riferimento. Il primo articolo teorico (M. Bartolini Bussi, *La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica*, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 12, 5-49) contiene un quadro molto eclettico in cui il riferimento a

Vygotskij è marginale. Il secondo articolo teorico (M. Bartolini Bussi, *Apprendere la matematica attraverso la discussione: grafici nel piano cartesiano*, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 14, 243-258), pur adottando ancora l'approccio di Pirie & Schwarzenberger, presenta uno spostamento significato verso la posizione Vygotskiana. Questi spostamenti sono legati a due fenomeni che si svolgono contemporaneamente: l'approfondimento culturale da parte dei membri del gruppo di ricerca e la ricchezza dei dati raccolti dalla classe e non riconducibili ai modelli precedenti. Questa evoluzione che intreccia dialetticamente la teoria e la pratica porta allo sviluppo del quadro di riferimento presentato in questo lavoro. Le tracce degli esperimenti didattici nel corso dei quali questa evoluzione si è svolta sono riportati nelle pagine che seguono.



2. Il coordinamento dei punti di vista (nel primo ciclo della scuola elementare).

Questo paragrafo è scritto in collaborazione con Mara Boni.

2.1. Introduzione.

Il nucleo fondamentale dell'esperimento è costituito da problemi di rappresentazione dello spazio visibile, limitati al caso del # MICRO-SPAZIO, cioè di quello spazio che può essere esperito dal bambino attraverso la manipolazione e la visione e nel quale è possibile, attraverso il movimento, una percezione esaustiva degli oggetti: il bambino è all'esterno di questo spazio; lo spazio è generato intorno agli oggetti.

Il problema del coordinamento dei punti di vista (CPV) ha come scopo *la rappresentazione dell'immagine globale di un oggetto o di un insieme di oggetti attraverso l'organizzazione di immagini (visuali) ottenute da punti di vista diversi.*

Piaget ha dedicato a questo problema una parte del libro scritto con Inhelder sulla *Rappresentazione dello spazio nel bambino*. La celebre *prova delle tre montagne* è il principale strumento diagnostico utilizzato. L'apparato sperimentale consiste di:

- a) una composizione tridimensionale che rappresenta tre montagne;
- b) dieci tavole che rappresentano le montagne viste da punti di vista diversi (alcune sono visuali impossibili);
- c) tre sagome tagliate a forma di montagna;
- d) un pupazzo che rappresenta il fotografo ambulante (osservatore).

Sono utilizzate tre tecniche:

- 1) il bambino deve ricostruire la visuale dell'osservatore con le tre sagome;
- 2) il bambino deve scegliere la tavola che corrisponde alla visuale dell'osservatore;
- 3) il bambino deve scegliere la posizione dell'osservatore che vede la visuale rappresentata da una delle tavole.

Nella versione standardizzata di Laurendau e Pinard, le tre montagne sono sostituite da tre coni di diverso colore e dimensione e vengono usate solo la seconda e la terza tecnica. I risultati documentati da questi autori e dai molti altri che hanno replicato l'esperimento mostrano una crescente capacità di fornire risposte corrette ed argomentate al crescere dell'età: tale evoluzione viene interpretata secondo lo schema *egocentrismo-decentramento* tipico del pensiero Piagetiano.

Negli esperimenti Piagetiani, la scelta di immagini (o, in altri casi, la produzione di immagini attraverso il disegno), così come la verbalizzazione che accompagna tale attività, viene utilizzata a fine diagnostico. Le osservazioni compiute fanno ipotizzare un parallelismo tra lo sviluppo cognitivo di tipo spaziale (che si può rilevare dalle risposte a prove come quella delle tre montagne) e l'abilità nella rappresentazione grafica.

Diversa è la posizione Vygotskiana sul problema della produzione e della lettura di immagini: il disegno (insieme con la lettura di immagini) ha un *ruolo funzionale* nello sviluppo complessivo del bambino (cognitivo, emotivo, comunicativo ecc.) e non può essere preso in considerazione separatamente da altri processi come il linguaggio (sia orale che scritto), il gesto e il gioco simbolico. Inoltre, lo sviluppo del disegno avviene in attività organizzate culturalmente e mediate dagli adulti (ad esempio i genitori o gli insegnanti) che svolgono attività insieme con il bambino.

Con il nostro esperimento ci siamo proposti di organizzare una attività di lungo termine culturalmente fondata e basata sulla intenzionale proposta di strumenti di mediazione semiotica nella forma di gesti, linguaggio verbale (orale o scritto), disegni e immagini e altri artefatti culturali: la traduzione tra sistemi di segni diversi è considerata nella letteratura un elemento fondamentale della costruzione del significato.

L'introduzione sistematica ed intenzionale della discussione matematica ha inoltre consentito di realizzare il coordinamento dei punti di vista attraverso meccanismi di conflitto socio-cognitivo e di costruire una forma esterna di attività condivisa che è l'oggetto dell'interiorizzazione.

Nel seguito saranno descritte brevemente le fasi fondamentali del percorso. Un resoconto più accurato è in corso di redazione (Ferri in preparazione). Per ciascuna fase si metterà in rilievo il significato nella costruzione del sapere da parte dell'allievo. La consapevolezza di tale significato consente all'insegnante di modificare se necessario la sequenza temporale sulla base delle esigenze della propria classe e di valutare un ritorno su alcune fasi, quando i dati di ritorno dalla classe mostrano incertezze particolari.

2. 2. Analisi delle fasi del percorso.

L'analisi delle fasi è basata sugli esperimenti pilota condotti dalle insegnanti Mara Boni, Tiziana Garuti e Silvia Salvini negli anni scolastici 1988/89 e 1989/90. Tale analisi ha trovato conferma in diverse repliche dell'esperimento. Le tre classi dell'esperimento iniziale appartenevano a scuole situate in località diverse (zona residenziale in città, grosso centro di provincia, zona extraurbana con forte immigrazione) e con organizzazione oraria diversa (tempo pieno o tempo normale). La situazione di partenza, estremamente differenziata, appariva fortemente condizionata dalle esperienze di diversa qualità offerte agli allievi in scuole materne più o meno efficienti: si andava da scuole che, in relazione alla conoscenza dello spazio, avevano proposto solo attività su scheda a scuole che avevano curato l'integrazione di esperienze reali e loro rappresentazioni.

Il complesso dei problemi del CPV è importante per lo sviluppo complessivo del bambino: la valenza culturale è evidente quando si pensa che attraverso problemi di CPV si avvicinano concetti fondamentali della geometria (le figure e le loro relazioni; i sistemi di riferimento; le trasformazioni geometriche; la misura).

L'esperimento si distende nell'arco dell'intero primo ciclo; nei casi da noi osservati il passaggio tra la prima e la seconda classe si ha intorno alla fase 7 o 8, cioè intorno ad una prima costruzione di un concetto scientifico di *punto di vista*.

Gli obiettivi possono essere così formulati (quelli a destra sono temporalmente successivi).

- costruire la visuale a partire dalla posizione dell'osservatore;
 - costruire la posizione dell'osservatore a partire dalla visuale;
- comprendere che se cambia la posizione dell'osservatore cambia la visuale;
 - comprendere che se cambia la visuale è cambiata la posizione dell'osservatore;
- esprimere correttamente relazioni spaziali tra oggetti nel # MICROSPAZIO;
 - finalizzare la verbalizzazione alla costruzione efficace della visuale;
 - riflettere sulle strategie usate per costruire la visuale.

FASI DEL PERCORSO COORDINAMENTO DEI PUNTI DI VISTA	GESTO	IMMAG.	PAROLA O (orale) & S (scritta)		
	PROVE INDIVIDUALI			DISCUSSIONI	
	manipol.	disegno	verbal.	bilancio	concett.
1 dettatura paesaggio	*		*		
2 discussione paesaggio			*	O	
3 disegno paesaggio		*			
4 discussione disegno				O	
5 dall'osservatore alla visuale: copia dal vero		*			
6 copia dal vero		*	→S		
7 discussione: <i>che cosa vuol dire punto di vista?</i>					O
8 spiega: <i>che cosa vuol dire punto di vista?</i>			S		
9 dalla visuale all'osservatore		*	S		
10 visuale maestra		*	←S		
11 copia dal vero: cubo		*			
12 discussione disegno				O	
13 disegno a memoria: cubo		*	→S		
14 copia dal vero: banco		*	→S		
15 discussione disegno				O	
16 copia dal vero: sedia		*			
17. il nascondino			*		
18. copia dal vero: giardino		*			

2.2.1. La dettatura del paesaggio.

Il gioco dei paesaggi prevede quattro momenti successivi da svolgere (i primi tre) in tempi ravvicinati (ed eventualmente ripetere in caso di difficoltà)

Alla *dettatura del paesaggio* partecipano due alunni (il codificatore e il decodificatore) e la classe è sullo sfondo.

A ciascuno dei due alunni scelti vengono consegnati alcuni oggetti (identici tra loro) per la costruzione di un paesaggio:

- 1) una casetta alta circa 15 cm (scatola da scarpe decorata);
- 2) un pupazetto alto circa 7-8 cm (non deve vedersi se è dietro la casa);
- 3) un'automobilina;
- 4) due alberi, non più alti della casa;
- 5) un animaletto.

Gli elementi sono posti su due tavoli separati da un paravento. Il resto della classe è disposto a ferro di cavallo intorno al tavolo del codificatore e, per via del paravento, non vede ciò che fa il decodificatore. È importante che il codificatore e il decodificatore non siano uno di fronte all'altro, cioè che entrambi guardino dalla stessa parte, per evitare l'effetto di riflessione speculare che potrebbe aversi in quel caso.

Viene data la seguente consegna

Tu (codificatore) costruisci un paesaggio usando tutti i pezzi, senza muoverti dal tuo posto. Dai le istruzioni al tuo compagno in modo che possa costruire un paesaggio uguale al tuo. Alla fine vedremo se vi siete capiti.
Tu (decodificatore) puoi, se non capisci, fare domande e chiedere chiarimenti.

Il codificatore dispone a piacere gli elementi sul tavolo e detta al compagno nascosto dal paravento le istruzioni. L'insegnante può sollecitare il codificatore ad esprimersi meglio prestandogli (eventualmente parole o espressioni), può anche sollecitare il decodificatore a chiedere chiarimenti se è in difficoltà. Al termine delle due costruzioni si toglie il paravento e si passa al confronto dei paesaggi.

Questa fase ha di solito la durata di pochi minuti e risulta molto piacevole per gli allievi. Compiono elementi di tipo affettivo (ad esempio la narrazione di storie) e spesso gli oggetti vengono riferiti allo spazio esterno.

2.2.2. La discussione del paesaggio.

L'insegnante prende nota su una piantina delle posizioni degli elementi del paesaggio e di quelle dei singoli allievi nel ferro di cavallo. Questa informazione è essenziale per i passi successivi. Viene tolto il paravento che separa i due tavoli ed inizia il confronto dei paesaggi. L'insegnante organizza i turni del discorso. I compagni che hanno seguito la dettatura attentamente intervengono con osservazioni relative agli errori nella disposizione degli oggetti, ma rilevano contemporaneamente le inesattezze della verbalizzazione del codificatore o la mancata richiesta di chiarimenti da parte del decodificatore.

Non tutti gli allievi partecipano alla discussione. L'insegnante insiste perché tutti intervengano. Gli scambi di battute tra pari sono ancora rari, perché gli allievi tendono a comunicare osservazioni e giudizi non discutibili. La costruzione del genere di discorso della discussione è solo all'inizio.

2.2.3. Disegno del paesaggio.

Viene tolto il paesaggio del decodificatore e lasciato solo l'altro. A tutti gli allievi, seduti a ferro di cavallo intorno al tavolo che contiene il paesaggio del codificatore viene data la seguente consegna:

Disegna questo paesaggio proprio come lo vedi, senza muoverti dal tuo posto.

L'avvio al concetto di punto di vista è esplicito, anche se la locuzione 'punto di vista' non è utilizzata direttamente.

I prodotti degli allievi confermano la diversità di livello delle classi coinvolte nell'esperimento. Mentre in due delle classi, la maggioranza degli allievi tiene conto del punto di vista, nell'altra si hanno prodotti di livello più basso: gli oggetti sono rappresentati in ordine sparso sul foglio o allineati sulla linea di base; vengono introdotti stereotipi (la casa col tetto a punta, alberi colorati in modo arbitrario) o elementi di tipo affettivo (il sole, le nuvole, la stalla per il cavallo ecc.).

2.2.4. Discussione del disegno.

Si tratta della discussione di bilancio del disegno individuale precedente, considerato come un problema di rappresentazione dello spazio. La discussione viene proposta alcuni giorni dopo le altre attività. In questo periodo, l'insegnante esamina attentamente i prodotti della classe e gli allievi si distaccano un po' dal loro prodotto.

Nel giorno della discussione viene ricostruita in classe la situazione del disegno: il paesaggio del codificatore è di nuovo al centro e a ciascun allievo viene chiesto di occupare la sua posizione nel ferro di cavallo.

L'apertura della discussione è gestita in modo diverso nelle diverse classi:

- a) raccolta di tutti i disegni presi da sinistra, da una posizione centrale e da destra e confronto;
- b) scelta di tre disegni (uno da sinistra, uno dal centro e uno da destra) e loro confronto;
- c) confronto di disegni con 'errori' tipici con altri più corretti.

La scelta della modalità di apertura dipende ovviamente dalla qualità generale dei prodotti.

L'insegnante orienta la discussione sulla rappresentazione delle relazioni spaziali piuttosto che su quelli dei particolari di altro tipo. Gli allievi devono prendere coscienza del fatto che la consegna si riferisce alla riproduzione di ciò che si vede e non ciò che si sa: alcune differenze rilevanti tra i disegni eseguiti conformemente alla consegna dipendono dalla diversità delle posizioni dei disegnatori.

Il gioco dei paesaggi viene ripetuto per due volte in tutte le classi e per tre volte nella classe con maggiori problemi. Questa attività richiede solo pochi minuti e può essere ripetuta anche per dare a tutti gli allievi l'occasione di cimentarsi con il problema.

Queste prime fasi dell'attività sono infatti fondamentali per tutto lo sviluppo successivo. Gli allievi, messi in condizione di usare la vista, la manipolazione e la parola (e più oltre anche il disegno), costruiscono il **# CAMPO VISIVO INTERNO**: esso dà ragione della potenziale differenza di comportamento tra gli animali (vincolati nella soluzione del compito a ciò che appare nel campo visivo) e i bambini, che possono includere stimoli non presenti, utilizzando il gesto, la vista e il linguaggio come elementi di pianificazione dell'azione.

I disegni cambiano rapidamente anche nella classe di livello iniziale più basso: gli allievi che disegnavano oggetti sparsi sul foglio conquistano la linea di base; vengono disegnate le diverse facciate della casa che sono viste 'spianate' sul foglio secondo proiezioni ortogonali multiple.

Anche il genere di discorso della discussione viene costruito progressivamente. Attraverso la guida dell'insegnante gli allievi imparano a distinguere ciò che è pertinente da ciò che non lo è. Inoltre, attraverso l'attenta introduzione da parte dell'insegnante di elementi metacognitivi, il copione della discussione di bilancio si arricchisce includendo anche la fase: *che cosa abbiamo imparato?*

2.2.5. Copia dal vero.

Gli allievi vengono disposti lungo le pareti dell'aula, in modo da avere punti di vista diversi. Al centro un dispositivo con alcuni oggetti di altezze diverse parzialmente interposti (es. una scatola da scarpe, una bottiglia, un bicchiere ed una pallina da tennis). Il piano d'appoggio è piuttosto basso, in modo che gli allievi vedano dal loro posto non solo gli oggetti ma anche una parte del piano stesso. In caso contrario il piano si ridurrebbe ad una linea e si forzerebbe, contro l'intenzione, il disegno vincolato ad una linea di terra. L'insegnante annota su una pianta la posizione degli allievi e la disposizione degli oggetti.

La consegna è la seguente:

Disegna gli oggetti proprio come li vedi.

In tutte le classi i prodotti sono curati e tengono conto del punto di vista del disegnatore, evitando di rappresentare le parti di oggetti nascoste. Alcuni allievi introducono le prime strategie di disegno in scorcio, abbandonando la linea di base. Gli allievi si staccano dai primi prodotti e *volontariamente* modificano il loro modo di disegnare. In termini Vygotskiani possiamo dire che è stata interiorizzata l'attività collettiva producendo l'attenzione volontaria che permette la riproduzione della visuale.

2.2.6. Copia dal vero con verbalizzazione.

La funzione del linguaggio nell'orientare volontariamente il disegno verso la riproduzione della visuale è fondamentale. Essa è il risultato dell'interiorizzazione delle discussioni precedenti, focalizzate sulla ricerca di ciò che si vede. Possiamo ipotizzare che gli allievi usino il linguaggio (almeno tra se e se) per orientare le loro strategie di disegno.

La copia dal vero con verbalizzazione ha lo scopo di rendere esplicito questo processo. Dato un dispositivo di quattro oggetti parzialmente interposti, la consegna è la seguente:

Disegna gli oggetti proprio come li vedi e scrivi come sono disposti.

I prodotti sono buoni, sia sul piano grafico che verbale: alcuni alunni esprimono correttamente anche situazioni spaziali complesse.

L'ordine delle consegne può essere migliorato, chiedendo la verbalizzazione *prima* del disegno. Tuttavia in questo caso la qualità dei prodotti ci induce a credere che il ricorso al linguaggio è divenuto 'spontaneo' per tutti gli allievi e che la verbalizzazione successiva è solo un modo di rendere osservabile il processo di analisi interno già effettuato. La consegna rinforza il valore della verbalizzazione, sottolineando l'importanza che questa ha nella esecuzione del compito.

2.2.7. Discussione: *che cosa vuol dire punto di vista?*

Questa discussione ha lo scopo di avviare la costruzione del concetto scientifico di *punto di vista*, la cui base pragmatica è stata costruita nelle fasi precedenti. *Il punto di vista è la posizione, fissa, da cui un occhio guarda qualche parte del mondo visibile, senza cambiare direzione dello sguardo.* Il concetto (scientifico) di punto di vista è inestricabilmente collegato con la modellizzazione geometrica del processo di disegno dal vero da cui derivano le tecniche della prospettiva: il punto di vista è il vertice del cono visivo (o della piramide visiva, come preferivano dire i teorici del quattrocento) costituito dai raggi visivi che proiettano i punti da disegnare sul quadro.

Questa è una discussione di concettualizzazione in cui gli allievi sono deliberatamente posti a confronto con una consegna di tipo verbale: si richiede loro di collegare il

complesso di esperienze svolte in precedenza alla locuzione *punto di vista*, esplicitando il nesso relativo.

Da qui in avanti, la locuzione *punto di vista* racchiuderà in se i sensi personali prodotti dagli allievi nel corso dell'intera attività.

Una analisi fine di questa discussione è contenuta nell'articolo:

M. Bartolini Bussi & M. Boni (1995), *Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano*, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 18, 221-256.

2.2.8. Spiega: *che cosa vuol dire punto di vista?*

Negli esperimenti da noi osservati, la discussione sul punto di vista si collocava verso la fine della prima elementare. All'inizio della seconda veniva proposta una consegna di verbalizzazione scritta individuale:

Rispondi per iscritto.

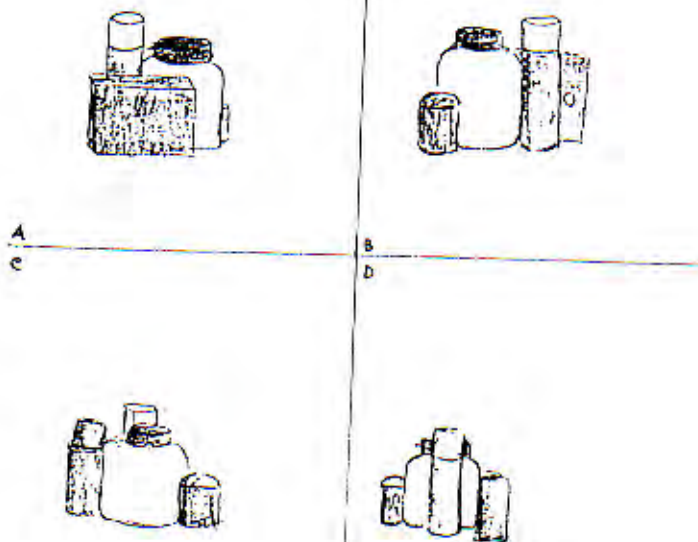
1) Che cosa è per te il punto di vista?

2) Scrivi il nome di almeno 5 oggetti che vedi guardando dalla tua posizione senza girare la testa.

3) Se cambi posto, pensi di vedere ancora gli oggetti che hai visto prima? Perché?

Negli esperimenti osservati, lo scopo principale era quello di riallacciare i fili di un discorso dopo i mesi estivi. Tuttavia, questo compito è significativo anche quando viene proposto nello stesso anno scolastico, a distanza di qualche tempo. In primo luogo (questione 1), consente all'insegnante di verificare quale parte dell'attività collettiva svolta fino a quel punto è stata interiorizzata dai singoli allievi. In secondo luogo (questione 2) rinforza il concetto di punto di vista costruito collettivamente, con un compito da risolvere individualmente. In terzo luogo (questione 3) propone un compito di anticipazione di una esperienza da risolvere nello spazio visivo interno.

Nella scheda vedi i disegni di quattro bambini. Sai dire qual è il disegno di Laura, Stefano, Marco ed Elena?



2.2.9. Dalla visuale all'osservatore.

Le attività svolte fino a questo punto hanno enfatizzato la dipendenza della visuale dall'osservatore (osservatori diversi hanno visuali diverse). Questa consegna ha lo scopo di ricostruire l'osservatore a partire dalla visuale.

L'insegnante prepara un dispositivo di tre - quattro oggetti di altezze diverse e parzialmente interposti. Realizza quattro schizzi che riproducono le visuali dai quattro vertici di un quadrato avente al centro il dispositivo. Dispone poi il dispositivo su un tavolo al centro dell'aula con i bambini tutti intorno. Quattro bambini rappresentano gli osservatori privilegiati.

La strategia utilizzata dalla maggior parte degli allievi è coerente con ciò che è documentato nella letteratura: l'allievo fissa l'attenzione sull'oggetto che 'sta davanti', immaginando di essere nella posizione di uno dei quattro compagni.

2.2.10. La visuale della maestra.

In questo caso, la classe è disposta nella posizione standard della lezione frontale con tutti i banchi disposti in file di fronte alla cattedra. Sulla cattedra sono disposti quattro - cinque oggetti parzialmente interposti, uno dei quali visibile dai bambini ma non visibile dalla maestra. Viene data la consegna

Restando fermo nella tua posizione, descrivi ciò che vede la maestra; poi disegna la composizione dal punto di vista della maestra.

In questo caso il compito è molto più complesso che nel caso precedente. È necessario stabilire relazioni spaziali tra il soggetto ed i singoli oggetti e compiere su tali relazioni le trasformazioni necessarie.

Quasi nessun allievo ha avuto difficoltà per l'esecuzione corretta del compito.

2.2.11. Copia dal vero: cubo.

Davanti a ciascun bambino viene posto di spigolo un cubo di legno grezzo (lato circa 8 cm) con un bollino colorato su ciascuna faccia. Alcuni bambini lo girano per metterlo nella più consueta posizione frontale, ma l'insegnante lo rimette a posto come prima. La consegna è la seguente:

Disegna il cubo dal tuo punto di vista proprio come lo vedi

I prodotti degli allievi delle varie classi si possono classificare secondo un ristretto numero di tipologie note nella letteratura sul disegno infantile (vedi pagina seguente: nell'ultima riga sono raccolte altre tipologie documentate in letteratura quando ai bambini di scuola elementare si chiede di rappresentare un cubo).

La catalogazione dei prodotti è molto importante perché è alla base della pianificazione della successiva discussione di bilancio.







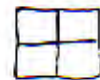







2.2.12. La discussione di bilancio.

La discussione di bilancio si propone di confrontare le diverse rappresentazioni e di giungere, se possibile, ad una strategia di rappresentazione condivisa. È a tutti gli effetti la discussione di bilancio di un problema geometrico di rappresentazione.

Negli esperimenti condotti tale discussione è stata gestita con modalità diverse:

- a) immediatamente dopo la conclusione del disegno;
- b) a distanza di qualche giorno.

In ogni caso si giunge ad istituzionalizzare il modello F

TIPO	DESCRIZIONE		
	A: falso sviluppo		
	B: doppia proiezione ortogonale delle facce laterali; linea di base; tetto.		
	C: tentativo di prospettiva cavaliere; linea di base		
	D: parte superiore in assonometria; parte inferiore con netta linea di base.		
	E: idem; linea di base sul bordo del foglio.		
	F: tentativo di rappresentazione in prospettiva centrale senza linea di base.		
altre tipologie possibili			
			
			

2. 2.13. Il disegno a memoria del cubo.

L'interiorizzazione del modello del cubo senza linea di base è confermata da questa ulteriore prova che viene svolta alcuni giorni dopo.

Disegna un cubo a memoria e spiega come hai fatto.

Il cubo disegnato a memoria è del tutto simile a quelli disegnati nella prova individuale precedente. Tuttavia il cubo è un oggetto 'artificiale', caratterizzato dall'uguaglianza degli spigoli. Questo dato è colto con immediatezza dai bambini che spesso tendono a riprodurlo nei loro disegni. Questa modalità di rappresentazione che conserva l'uguaglianza di lunghezze secondo direzioni privilegiate è sistemata teoricamente nella geometria descrittiva con la cosiddetta assonometria isometrica, usata nel disegno tecnico. Il nostro obiettivo non era però quello di sviluppare in modo esclusivo alcune strategie di disegno tecnico, ma piuttosto di trattare il disegno in modo funzionale allo sviluppo complessivo del bambino. Abbiamo quindi ritenuto necessario spostare l'attenzione sulla rappresentazione del mondo visibile secondo criteri di

verosimiglianza (piuttosto che secondo criteri di comunicazione delle informazioni necessarie alla realizzazione tecnica di un oggetto): intendevamo cioè spostarci sulla prospettiva centrale piuttosto che sull'assonometria.

Abbiamo quindi introdotto il disegno dal vero di oggetti 'meno regolari' quali tavoli e sedie, a proposito dei quali discutere i problemi di verosimiglianza.

2. 2.14. Copia dal vero del banco.

Al centro dell'aula sono collocati due banchi: uno è il tavolo da disegno, nel quale, a turno, prendono posto i diversi allievi; l'altro è l'oggetto da riprodurre: sul piano del banco si trovano due palline da tennis, una dietro l'altra, in modo che il disegnatore le veda parzialmente interposte.

La consegna, individuale, è la seguente:





Disegna il banco proprio come lo vedi.

Il disegno prevede due tipi di complessità:

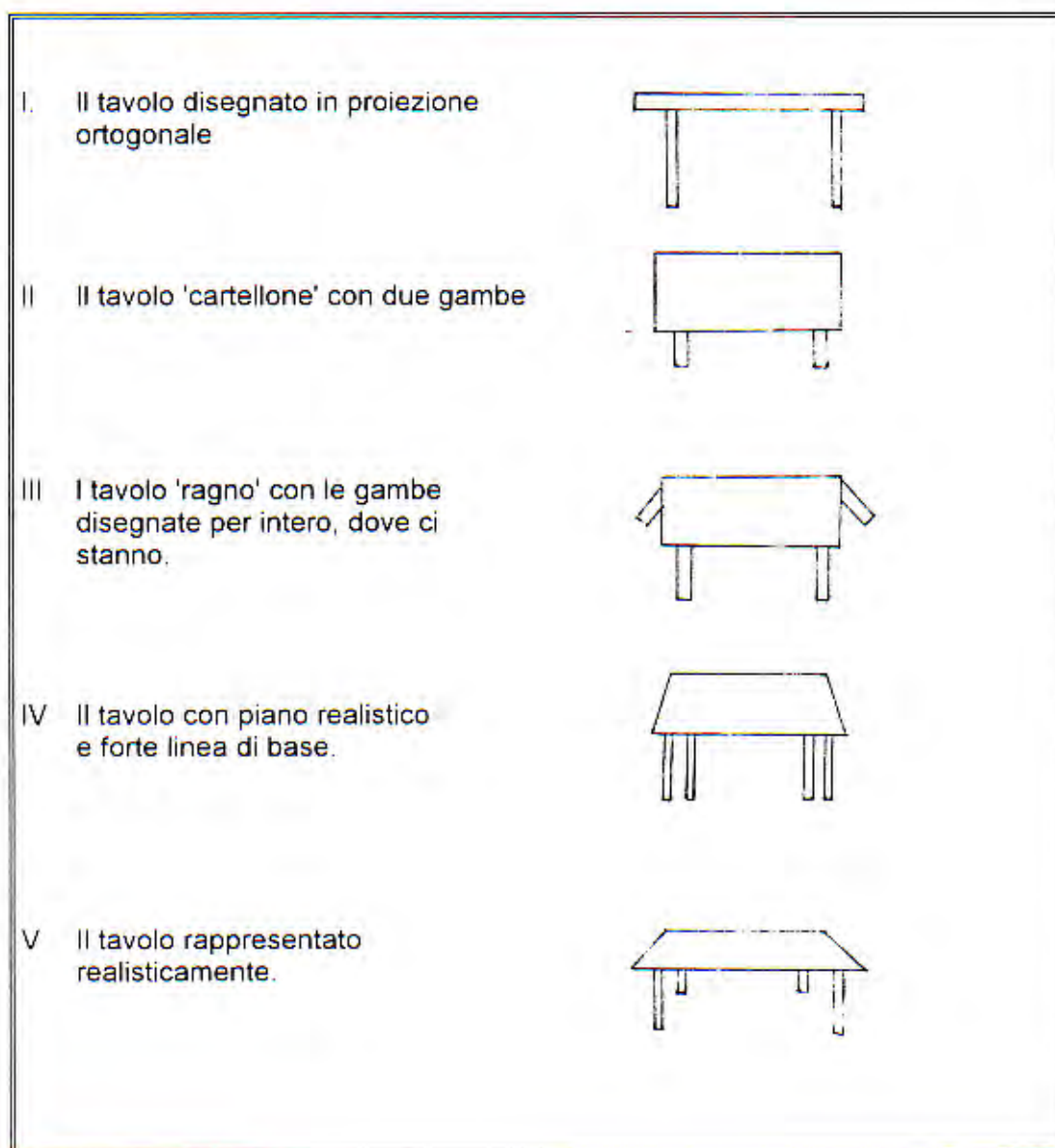
1) il disegno delle palline;

2) il disegno delle diverse parti del banco, così come esse appaiono.

Sul primo problema esistono studi precisi. Freeman osserva una evoluzione nella rappresentazione di due palline parzialmente interposte secondo gli stadi seguenti:

I. Le palline sono separate senza tenere conto della loro posizione.	
II. Le palline sono separate accostate in verticale secondo la convenzione che l'alto del foglio contiene l'immagine di oggetti lontani.	
III. Le palline sono non separate ma sono disegnate anche le parti nascoste (trasparenza).	
IV. Le palline sono disegnate in modo realistico.	

Anche sulla rappresentazione dei tavoli esistono casistiche precise che sono puntualmente ritrovate nei nostri esperimenti, sia nella forma classica che in combinazione tra loro.



2.2.15. Discussione del disegno.

Dopo una attenta catalogazione dei prodotti degli allievi, viene condotta la discussione di bilancio.

Il problema delle palline è già stato risolto nella fase individuale. Tutti gli allievi producono una rappresentazione realistica. Il problema del tavolo è più complesso. Le casistiche sono tutte presenti.

L'insegnante conduce la discussione in modo da:

- 1) focalizzare l'attenzione degli allievi sulle differenze di rappresentazione collegabili ad un modello geometrico (e non alla presenza - assenza di particolari, alla pulizia del tratto ecc.);
- 2) guidare gli allievi al riconoscimento delle rappresentazioni 'verosimili'.

2.2.16. Copia dal vero: sedia.

Un altro oggetto complesso viene proposto alla copia dal vero individuale: una sedia con alcuni oggetti posati sul sedile. La rappresentazione della sedia appare molto realistica per tutti i bambini.

In una classe il disegno della sedia è stato approfondito in modo diverso, con l'introduzione di uno strumento interessante (la fotografia), che sarà poi ripreso da tutti negli sviluppi successivi dell'esperimento.

Le tappe principali sono le seguenti:

- 1) copia dal vero di una sedia dal proprio punto di vista;
- 2) fotografia dal posto di ciascun bambino della sedia;
- 3) scelta, da parte di ciascun bambino, della foto dal proprio posto;
- 4) ricalco su lucido delle linee essenziali dell'oggetto fotografato;
- 5) discussione collettiva: confronto del proprio disegno con il ricalco;
- 6) copia dal vero della sedia dal proprio punto di vista.

Questo approfondimento si rivela particolarmente utile in quelle classi nelle quali il disegno iniziale (1) presenta ancora molti 'errori'.

2.2.17. Il nascondino.

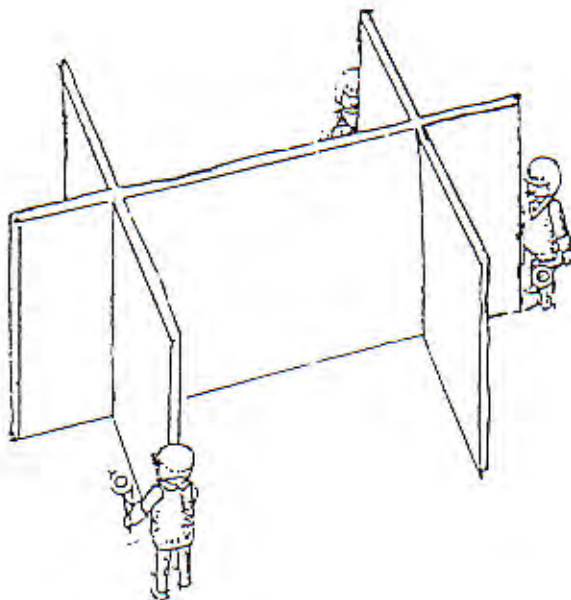
Nel corso dell'itinerario, in tempi diversi nelle diverse classi (ma comunque dopo la discussione su *che cosa è il punto di vista?*) è stato posto il problema del nascondino tratto da un'idea di Hughes, Donaldson & Pontecorvo. Si tratta di un problema di lettura di immagini. Tutti gli allievi lo hanno risolto correttamente.

2.2.18. Copia dal vero: il giardino.

Nella fase finale del percorso, l'abilità di disegno realistico è stata reinvestita nella produzione di copie dal vero in situazioni complesse.

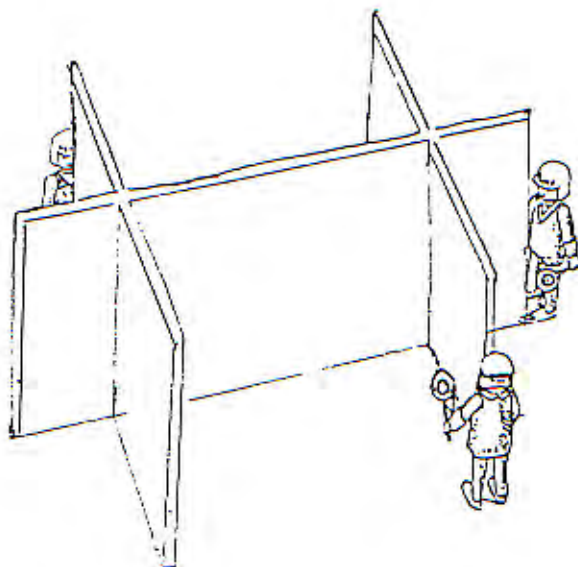
Ad esempio si è suggerito di disegnare uno scorcio del giardino della scuola. Il disegno proposto a pag. 28 è stato tratto da questa fase dell'esperimento.

Ci sono tre poliziotti fermi in queste posizioni. Dove può essersi nascosto Pierino se non vuole essere visto? Segna con una crocetta la posizione di Pierino. **Spiega ogni volta il ragionamento che hai fatto.**



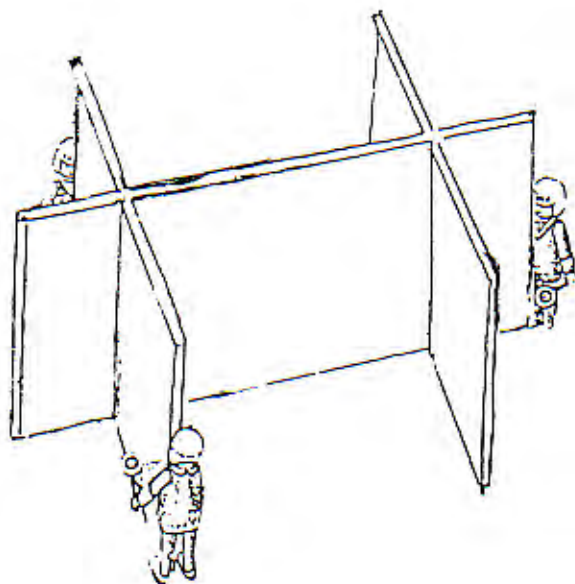
IL NASCONDINO (1)

Ci sono tre poliziotti fermi in queste posizioni. Dove può essersi nascosto Pierino se non vuole essere visto? Segna con una crocetta la posizione di Pierino. **Spiega ogni volta il ragionamento che hai fatto.**



IL NASCONDINO (2)

Ci sono tre poliziotti fermi in queste posizioni. Dove può essersi nascosto Pierino se non vuole essere visto? Segna con una crocetta la posizione di Pierino. **Spiega ogni volta il ragionamento che hai fatto.**



IL NASCONDINO (3)

3 La rappresentazione del mondo visibile attraverso il disegno geometrico in prospettiva nel secondo ciclo della scuola elementare (e in alcune classi di scuola media).

Questo paragrafo è scritto in collaborazione con Franca Ferri

3. 1. Introduzione.

Questo esperimento didattico si propone come ideale continuazione dell'esperimento precedente nel secondo ciclo elementare. La diversa età degli allievi consente di realizzare l'approccio culturale Vygotskiano attraverso l'introduzione, accanto a quelli già considerati (gesto, linguaggio verbale orale o scritto, il disegno dal vero), di un sistema di segni sviluppato all'interno della geometria, quello del disegno geometrico in prospettiva.

I motivi (vedi # **ATTIVITÀ AZIONI OPERAZIONI**) di questo esperimento didattico possono essere così riassunti:

- 1) un insieme di strumenti per il disegno, in grado di soddisfare il bisogno crescente di versosimiglianza, che manifestano i bambini di questa età;
- 2) una cultura di progresso scientifico, che vede nella costruzione sociale del sapere il processo collettivo di costruzione di nuova conoscenza;
- 3) la esperienza della complessità epistemologica della geometria, realizzata attraverso una dialettica continua tra la realtà sensibile ed i suoi modelli matematici;
- 4) una rete di concetti geometrici, previsti dai programmi della scuola elementare, esperiti come strumenti necessari per la soluzione di complessi problemi di rappresentazione;
- 5) la esperienza della dimostrazione in geometria nella forma di catene di enunciati.

Questi motivi, che caratterizzano un progetto globale per lo sviluppo dell'allievo, sono espressi in ordine crescente rispetto alla valenza disciplinare.

Il primo di essi risponde ad un bisogno evidente per gli allievi stessi, che spesso smettono di disegnare volentieri quando non sono più soddisfatti del prodotto del loro disegno (Vygotskij 1972).

Il secondo di essi (vedi § 11.2) è piuttosto riferibile alla collettività composta da allievi ed insegnante: esso risponde al bisogno di organizzare le proprie conquiste in riferimento alle conquiste culturali dell'umanità, senza assumere modelli in modo rigido.

Il terzo di essi si riferisce all'origine storica della geometria e al suo rapporto dialettico con la realtà sensibile, spesso assente dall'attività di insegnamento-apprendimento. La prospettiva è un modello matematico della rappresentazione della realtà percepita e come tale chiama in causa tutti i problemi della modellizzazione (convenzioni, etc.).

Il quarto di essi si riferisce alla costruzione della rete concettuale della matematica, attraverso il processo di costruzione di strumenti di soluzione di problemi (vedi # **STRUMENTO-OGGETTO**). Poiché tra questi strumenti non è la misura a giocare il ruolo fondamentale, contrariamente all'esperienza comune degli allievi, si ha un utile bilanciamento delle attività più frequenti nella scuola: si avvicina cioè la geometria senza misura, in cui si trattano i problemi di incidenza, dando al disegno geometrico con la riga la funzione di strumento di matematizzazione.

Il quinto di essi è direttamente collegato al precedente. L'ingresso della geometria 'senza misura' inibisce l'uso di uno strumento di validazione tipico delle scienze sperimentali e pone il problema della giustificazione in geometria, non basata sull'esperienza diretta ma sulla deduzione da altre proprietà ammesse.

FASI DEL PERCORSO	MODALITÀ	ALCUNI MOTIVI	
		Costruzione sociale	Dimostrazione
1. Il tavolo e la pallina	problema individuale		
2. Bilancio	discussione collettiva (soluzione empirica)	*	(*)
3. Rappresentazione geometrica di spazi esperienziali	problemi individuali e discussioni collettive	*	
4. Invarianti del disegno in prospettiva	schema collettivo	*	
5. Il disegno del mesospazio	problema individuale		
6. Bilancio / Concettualizzazione	discussione collettiva	*	
7. Piero della Francesca	lettura collettiva	*	*
8. <i>Che cosa ho capito?</i>	commento individuale	*	*
9. Il tavolo e la tovaglia	problema individuale		
10. Bilancio	discussione collettiva	*	(*)
11. Il pavimento rettangolare	problema individuale		
12. Il metodo di Pélerin	discussione collettiva	*	(*)
13. Lo spazio prima degli oggetti	scheda individuale	*	

3.2. Analisi delle fasi del percorso.

Nel seguito saranno descritte brevemente le fasi fondamentali del percorso. Un resoconto più accurato è in corso di redazione (Ferri in preparazione).

L'analisi delle fasi è basata sugli esperimenti pilota condotti da Franca Ferri, Mara Boni e Silvia Salvini negli anni 1990-94. Altre classi di scuola elementare e media hanno replicato parte dell'esperimento, offrendo conferme alle analisi già condotte.

3.2.1. Il tavolo e la pallina.

Il problema è quello della tavola 1 del § 3.3

Disegna la pallina al centro del tavolo.
Puoi usare gli strumenti.
Spiega il tuo ragionamento.

Nel problema c'è qualcosa di vecchio (nella scelta del tavolo) e qualcosa di nuovo (la consegna esplicita).

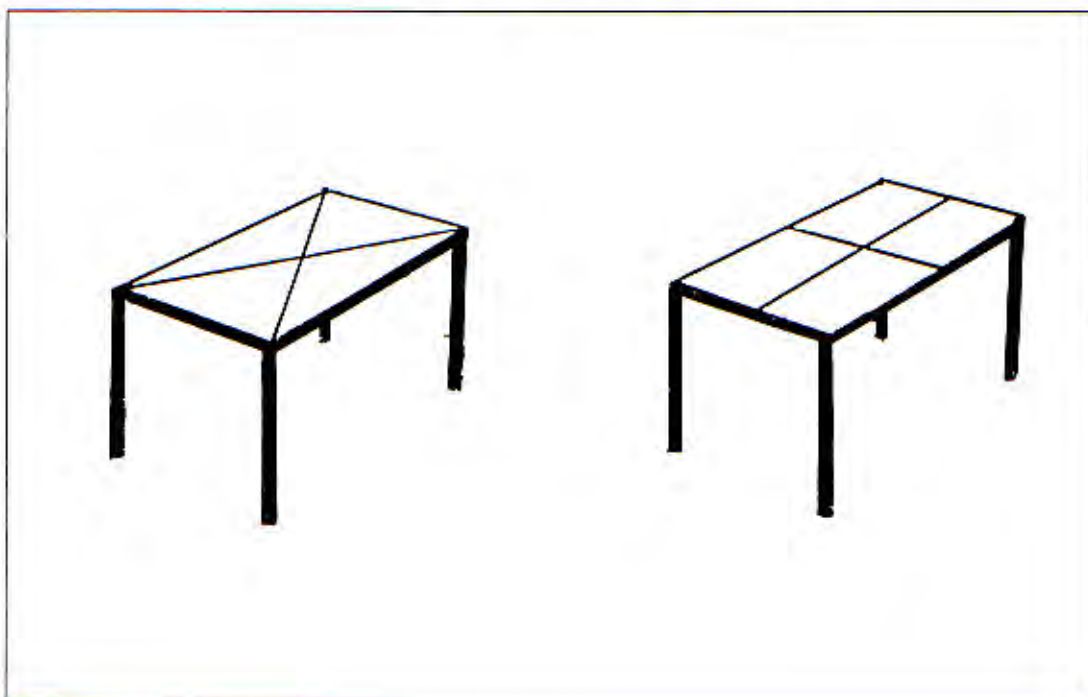
Le soluzioni si suddividono in tre categorie:

- 1) dipendenti da stime ad occhio (la pallina è disegnata direttamente in un punto 'verosimile');
- 2) dipendenti da processi di misura (sono tracciate le rette congiungenti i punti medi dei lati opposti e la pallina è posta al loro incrocio; oppure la pallina è disegnata nel punto medio di uno dei segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti; oppure la pallina è tracciata nel punto medio di una diagonale ecc.);
- 3) dipendenti dal solo allineamento (la pallina è posta nel punto di incontro delle diagonali).

La maggioranza degli allievi sceglie una soluzione del secondo tipo.

3.2.2. Discussione (soluzione empirica).

Secondo l'abitudine segue una discussione di bilancio. La discussione si presenta sempre difficile: gli autori delle soluzioni corrette (terzo tipo) sono di solito pochi ed incapaci di convincere i sostenitori delle strategie del secondo tipo.



L'unico modo per risolvere la situazione sembra quello di forzare una soluzione empirica, attraverso il ricorso alla fotografia (obiettivo normale, non grandangolo). A partire da un tavolo sul cui piano sono tracciati i segmenti congiungenti i punti medi dei lati si ottiene una immagine del centro del tavolo: si verifica poi che tale punto *non* è quello che sta sui segmenti congiungenti i punti medi dei lati dell'immagine. La stessa tecnica mostra che il centro ottenuto come punto di incontro delle diagonali ha per immagine il punto di incontro delle diagonali.

La soluzione empirica convince gli allievi. Tuttavia:

- a) focalizza l'attenzione sui *cambiamenti* che avvengono quando si passa da un oggetto ad una sua immagine;
- b) non fornisce regole generali che possano applicarsi ad altri casi, costruendo un embrione di teoria della rappresentazione.

Inoltre la discussione è sempre difficile per l'ambiguità tra gli oggetti e le loro immagini, per la difficoltà a descrivere e confrontare proprietà geometriche delle figure che rappresentano gli uni e le altre.

Le tappe seguenti sono pianificate proprio per risolvere questi problemi.

3.2.3. Rappresentazione geometrica di spazi esperienziali.

Due insiemi di problemi vengono introdotti:

- 1) la descrizione, con linguaggio geometrico, di immagini (vedi ad esempio le tavole 2 e 3 del § 3.3);
- 2) la descrizione, con linguaggio geometrico, di situazioni (oggetti o azioni) reali (ad esempio, la posizione del corpo in un teatro d'ombre o nelle fasi della battuta della pallavolo).

Il linguaggio geometrico utilizzato forzatamente dagli allievi (è un esempio evidente di # **MEDIAZIONE SEMIOTICA**) è quello delle attività più tradizionali (da sussidiario) condotte in precedenza o in parallelo dalle insegnanti.

3.2.4. Invarianti nel disegno in prospettiva.

Le attività precedenti, approfondite anche attraverso discussioni collettive, consentono di riprendere il discorso interrotto con strumenti diversi. A partire da una nuova attività di copia dal vero di un oggetto con struttura geometrica regolare (ad esempio un tavolo o una grossa scatola) accompagnata dalla fotografia e dal ricalco di quest'ultima, si avvia la discussione per costruire uno schema: lo schema raccoglie ciò che cambia (variante) e ciò che si conserva (invariante) nel passaggio dall'oggetto reale (descritto geometricamente) alla sua immagine (descritta geometricamente).

Lo schema è impostato dall'insegnante su due colonne (realtà/ rappresentazione oppure oggetti/immagini). La ricchezza dello schema dipende dalla conoscenza di proprietà geometriche da parte degli allievi.

REALTÀ	RAPPRESENTAZIONE
punto	punto
retta	di solito retta
quadrato	quadrilatero
triangolo	triangolo
	ecc.

L'insegnante con la costruzione di questo schema introduce un nuovo strumento di # **MEDIAZIONE SEMIOTICA** che sposta l'attenzione sugli invarianti del disegno.

3.2.5. Il disegno del mesospazio.

Lo schema precedente si dimostra molto utile nel controllo dei disegni e nella pianificazione dei disegni di oggetti.

Lo schema viene messo in crisi proponendo un disegno del *mesospazio* (vedi # **MICRO, MESO, MACRO-SPAZIO**), cioè di un ambiente (aula, corridoio, ecc.) che contiene gli stessi disegnatori. La consegna è la seguente:

Disegna l'aula dal tuo punto di vista.
Scrivi un tuo commento

La qualità dei disegni è buona, ma c'è molta difficoltà a collocare gli oggetti nello spazio rappresentato.

3.2.6. Discussione di bilancio.

I disegni vengono discussi insieme con i testi individuali. Emerge la necessità di un metodo generale che consenta di 'disegnare lo spazio prima degli oggetti'.

3.2.7. Piero della Francesca.

Vengono proposti alla lettura collettiva guidata due brani originali (# **MEDIAZIONE SEMIOTICA**) dal *De Prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca (1460?) (vedi tavole 4 e 5 in § 3.3).

Il primo illustra la teoria della visione e della pittura; il secondo fornisce il primo passo per disegnare una griglia quadrettata su un quadrato disegnato in prospettiva sul piano di terra.

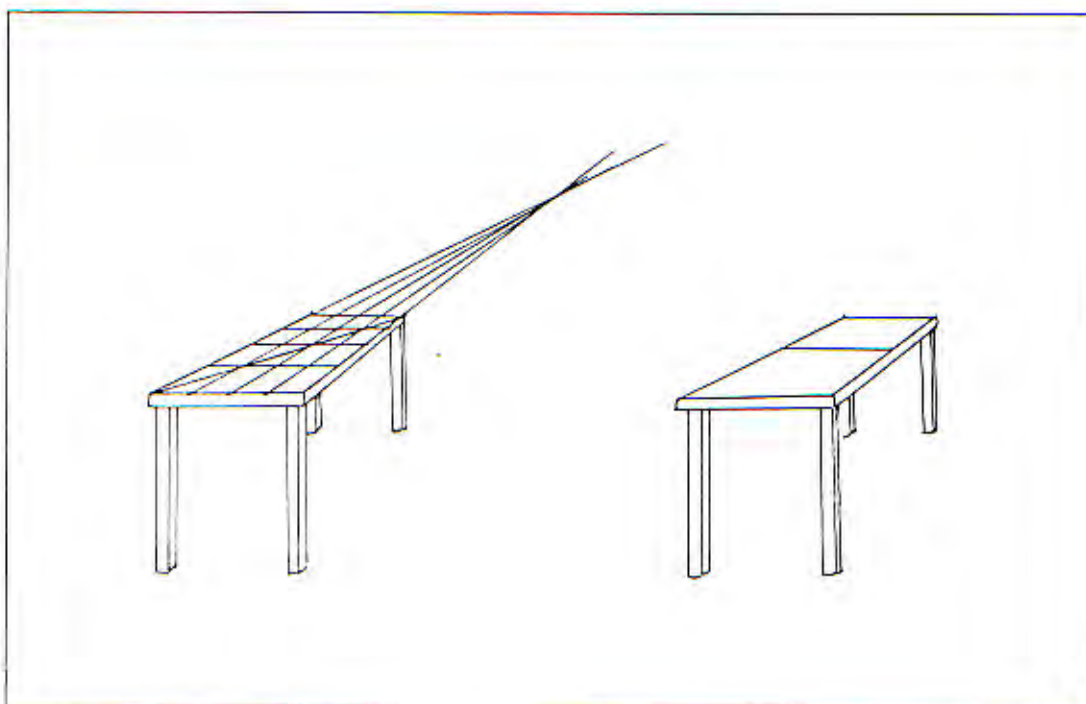
3.2.8. Che cosa ho capito?

Dopo la lettura gli allievi compongono un testo individuale rispondendo alla domanda: *che cosa ho capito?*

3.2.9. Il tavolo e la tovaglia.

Viene dato un nuovo problema individuale (vedi tavola 6 in § 3.3).

Disegna la tovaglia quadrettata sul tavolo disegnato in prospettiva.



Nel problema c'è qualcosa di vecchio (il richiamo al metodo di Piero del punto di fuga principale) e qualcosa di nuovo (la posizione decentrata del tavolo, la necessità di un metodo per disegnare le immagini delle linee parallele al piano del quadro).

La maggior parte degli allievi disegna correttamente le immagini delle linee perpendicolari al piano del quadro, facendole convergere al punto di fuga principale determinato dai due lati con la stessa direzione. Nel disegno delle altre linee della quadrettatura invece prevalgono i tentativi empirici. Solo pochi allievi introducono una diagonale per determinare la posizione di tali linee. Nessuno dà la soluzione corretta.

3.2.10. Discussione: quale è la forma del tavolo?

Nella discussione di bilancio si consolida per tutti il ricorso al punto di fuga principale. Viene poi accettata come 'corretta' la soluzione col ricorso alla diagonale.

Poi l'insegnante pone il problema: 'Quale è la forma del tavolo?'. Gradualmente gli allievi si rendono conto che la soluzione accettata porta a disegnare sul tavolo una tovaglia di 4x4 quadrati; dunque il tavolo è quadrato, contro l'esperienza consueta degli allievi e contro l'impressione che si ha dal disegno.

La nuova soluzione viene in questo caso costruita collettivamente, dividendo il tavolo con una linea passante per il centro in due metà: $8 \times 4 = (4+4) \times 4$.

3.2.11. Il pavimento rettangolare.

Vengono posti due problemi individuali di quadrettatura: piastrellatura di un pavimento già disegnato in prospettiva. Il pavimento è anche assegnato in pianta ed è pavimentato con 5x7 grandi piastrelle. L'osservatore è posto:

a) nel primo problema al centro di uno dei lati corti;

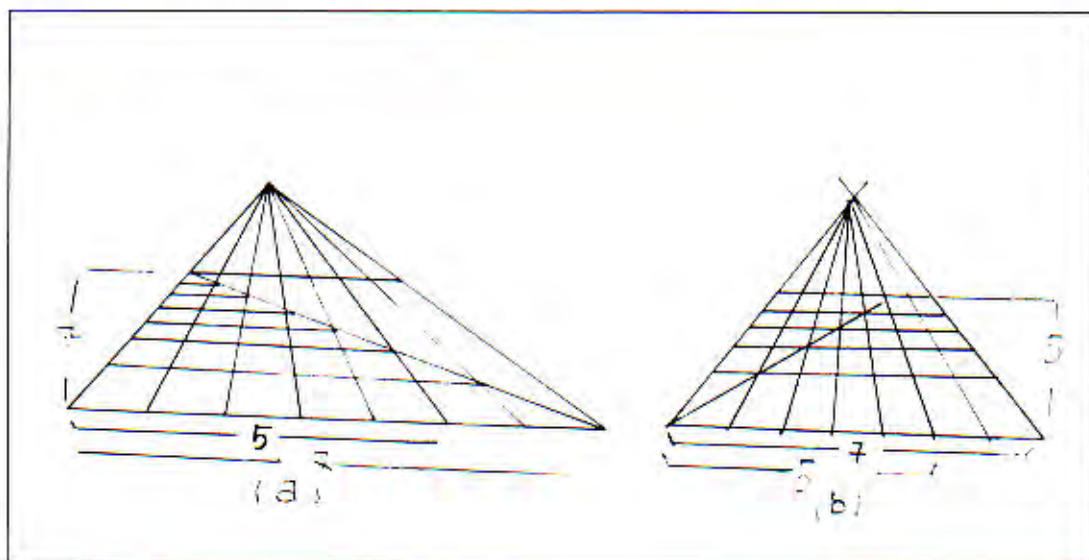
b) nel secondo problema al centro di uno dei lati lunghi.

La consegna è la seguente (vedi tavole 7 e 8 nel § 3.3):

Disegna il pavimento.
Spiega il tuo ragionamento.

3.2.12. Discussione: il metodo di Pélerin.

Questa discussione di bilancio consente di estendere a tutta la classe le strategie di completamento (caso a) e di riduzione (caso b) al quadrato messe in opera da alcuni allievi.



Viene fornita agli allievi la soluzione di J. Pélerin (tavola 9).

3.2.13. Lo spazio prima degli oggetti.

Viene fornita agli allievi la copia della pagina di un testo per la scuola superiore (tavole 10 e 11), nella quale è descritto operativamente ma senza giustificazioni un metodo per disegnare l'interno di una stanza in prospettiva, in modo da poter disporre anche gli arredi in modo realistico. La consegna è la seguente:

Disegna una stanza ed arredala a tuo piacere.

3.2.14. Problemi supplementari.

Nel corso dell'esperimento vengono assegnati anche problemi supplementari di lettura di immagini, di completamento di immagini, di copie dal vero, ecc. Alcuni esempi sono riportati nelle tavole successive.

3.3. Tavole dei problemi.

Le tavole che seguono riproducono il testo dei problemi individuali o delle letture, nelle dimensioni originali date agli allievi. Esse possono essere fotocopiate e riprodotte direttamente.

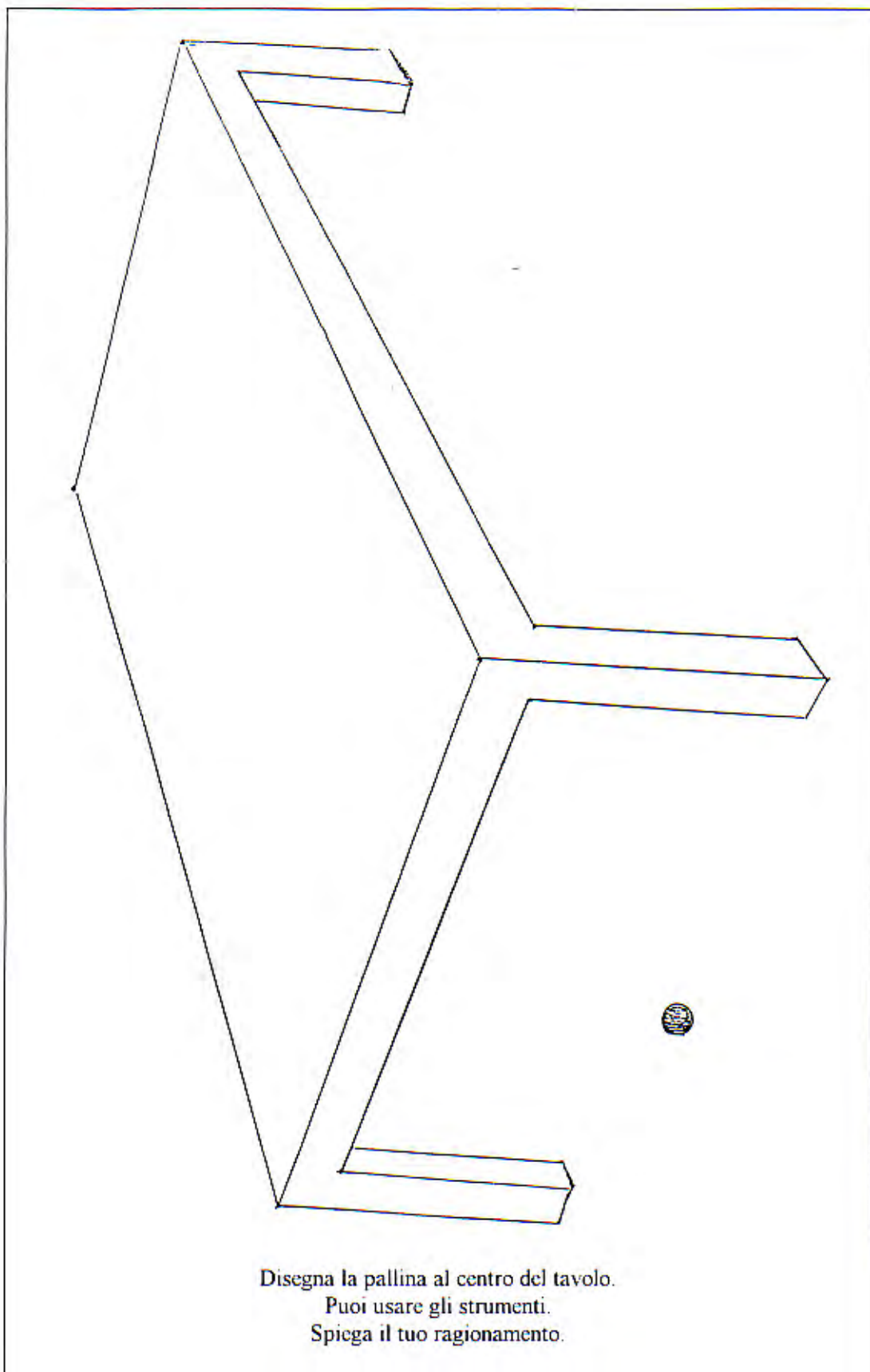
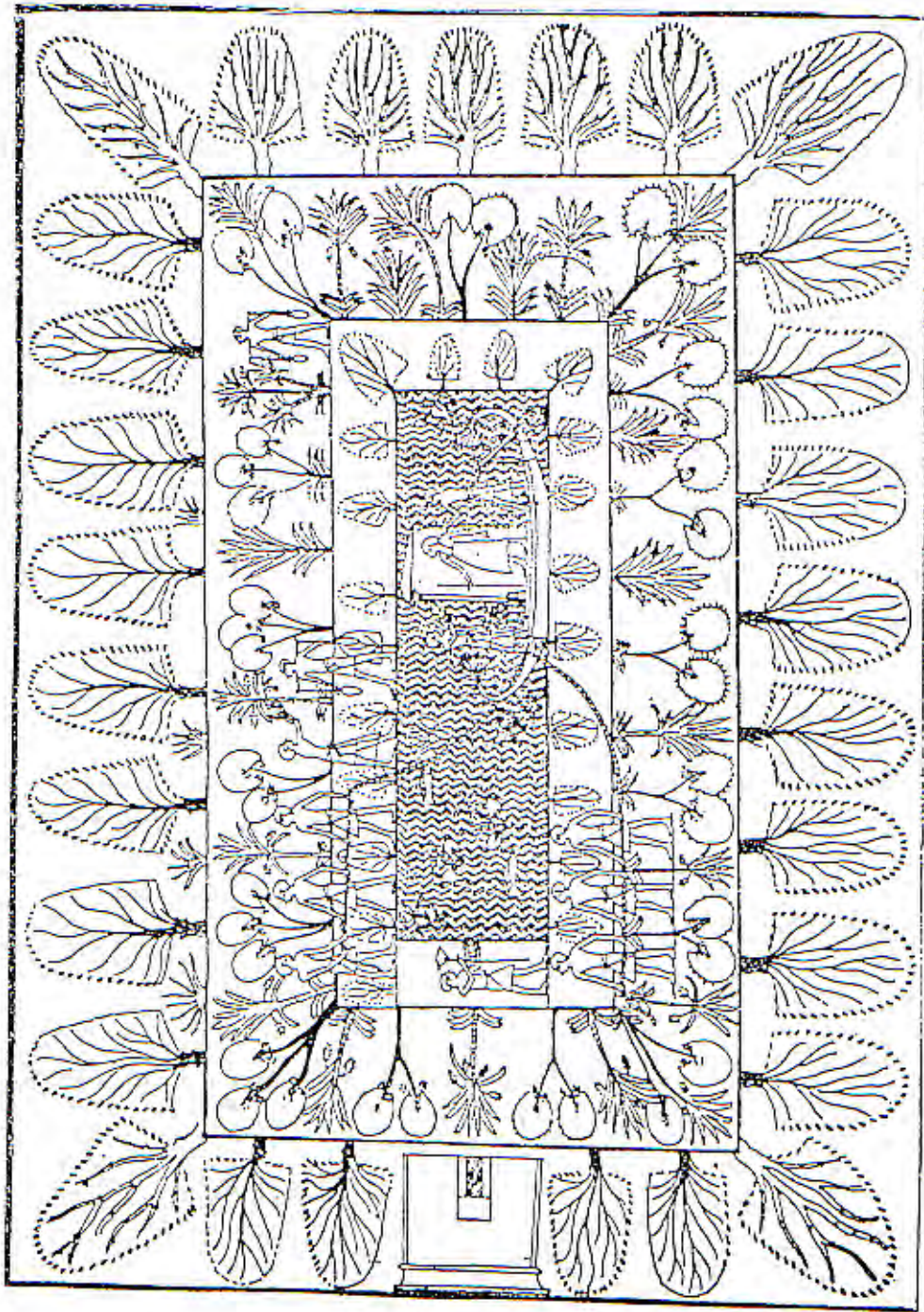


tavola 1



Descrivi, con linguaggio geometrico, l'immagine del giardino egizio
Commenta a tuo piacere.

tavola 2



Questa è una fotografia della Festa in Piazza
che si tiene ogni anno a Crevalcore nella prima domenica di settembre.
Un tavolo lungo centinaia di metri viene apparecchiato da una porta all'altra del paese.
Descrivi questa immagine con linguaggio geometrico.

tavola 3

(B) La pictura contiene in sé tre parti principali, quali diciamo essere disegno, commensuratio et colorare. Disegno intendiamo essere profili et contorni che nella cosa se contene. Commensuratio diciamo essere essi profili et contorni proportionalmente posti nei luoghi loro. Colorare intendiamo dare i colori commo nelle cose se dimostrano, chiari et uscuri secondo che i lumi li devariano. De le quali tre parti intendo tracta[re] solo de la commensuratione, quale diciamo prospectiva, mescolandoci qualche parte de disegno, perciò che senza non se po dimostrare in opera essa prospectiva; il colorare lasciaremo stare, e tractaremo de quella parte che con line angoli et proportioni se po dimostrare, dicendo de puncti, linee, superficie et de corpi. La qual parte contiene in sé cinque parti: La prima è il vedere, cioè l'ochio; seconda è la forma de la cosa veduta; la terza è la distantia da l'ochio a la cosa veduta; la quarta è le linee che se partano da l'estremità de la cosa e vanno a l'ochio; la quinta è il termine che è intra l'ochio e la cosa veduta dove se intende ponere le cose.

La prima dissi essere l'ochio, del quale non intendo tractare se non quanto fie necessario a la pictura. Dunqua dico l'ochio essere la prima parte, perché gli è quello in cui s'apresentano tucte le cose vedute socto diversi angoli; cioè quando le cose vedute sono equalmente distante da l'ochio, la cosa maggiore s'apresenta socto maggiore angolo che la minore, et similmente, quando le cose sono equali et non sono a l'ochio equalmente distante, la più propinqua s'apresenta socto maggiore angolo che non fa la più remota, per le quali deversità se intende il degradare d'esse cose. La seconda è la forma de la cosa, perhò che senza quella l'intelletto non poria giudicare nè l'ochio comprendere essa cosa. La terza è la distantia da l'ochio a la cosa, perché, se non ci fusse la distantia, seria la cosa con l'ochio contingente ovvero contigua, e quando la cosa fusse maggiore de l'ochio, non seria capaci a riceverla. La quarta sono le linee, le quali s'apresentano da l'estremità de la cosa e terminano nell'ochio, infra le quali l'ochio le receve e discerne. La quinta è uno termine nel quale l'ochio describe co' suoi raggi le cose proportionalmente et posse in quello giudicare la loro misura; se non ci fusse termine non se poria intendere quanto le cose degradassaro, sì che non se porieno dimostrare. Oltre di questo è necessario sapere lineare in propria forma sopra il piano tucte le cose che l'omo intende fare.

Intese le sopradecte cose, seguitaremo l'opera, facendo di questa parte dicta prospectiva tre libri. Nel primo diremo de puncti, de linee et superficie piane. Nel secondo diremo de corpi chubi, de pilastri quadri, de colonne tonde et de più facce. Nel terzo diremo de le teste et capitelli, base, torchi de più base et altri corpi diversamente posti.

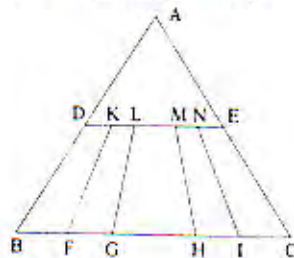
Puncto è la cui parte non è, secondo i geumetri dicono essere immaginativo; la linea dicono avere lunghezza senza latitudine.

Et perché questi non sono aparenti se non è a l'intellecto et io dico tractare de prospectiva con dimostrazioni le quali voglio sieno comprese da l'ochio, perhò è necessario dare altra difinitione. Dirò adunqua essere una cosa tanto picholina quanto è possibile ad ochio comprendere; la linea dico essere extensione da uno puncto ad un altro, la cui larghezza è de simile natura che è il puncto. Superficie dico essere larghezza et longhezza compresa da le linee. Le superficie sono demolte ragioni, quali triangola, quale quadrangola, quale tetragona, quale pentagona, quale exagona, quale octagona et quale de più et diverse facce, commo per figure ve se dimostrerà. [...]

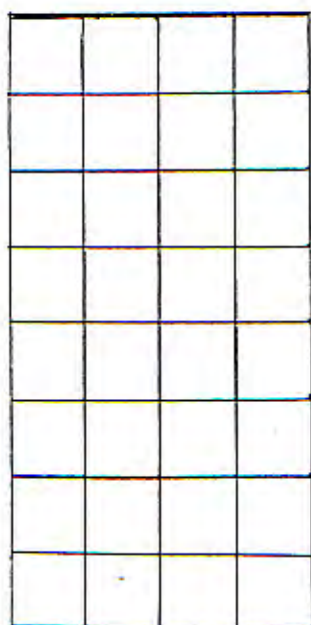
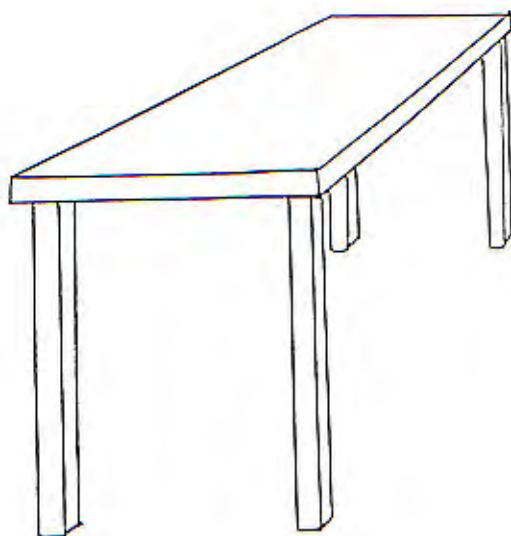
Lettura dal *De Prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca (1460?)

[XIV] *La figura quadrata degradata in più parti equali dividere.*

Verbi gratia, sia la figura degradata .BCDE. et l'ochio sia .A. commo per le precedenti è dicto, la quale o posto sopra il piano degradato in quadro, che fa quello medesimo che nel luogo posto prima commo è dimostro, si che seguitarò questo, perchè fa quello effecto et è più breve. Sia commo è dicto .BCDE. quadrato et l'ochio sia .A. Devidi .BC. in quante parti te piaci sia deviso, in .FGHI. equali, poi tira .F. al puncto .A. et .G. et .H. et .I. al puncto .A., le quali devideranno .DE. in punti .KLMN. Dico che .DE. è deviso in quella proportione che è deviso .BC., perchè .BF. ad .DK. è quello che è da .BC. ad .DE. et .FG. ad .KL. è commo .GH. ad .LM., et .HI. ad .MN. è commo .BC. ad .DE., sì che sono in proportione. Altramente, perchè .BC. et .DE. sono socto uno medesimo [angolo], così .BF. et .DK. sono socto uno medesimo angolo, et .FG. con .KL. socto uno angolo, et .GH. con .LM. sono socto uno angolo, così .HI. con .MN. sono socto un angolo, et .IC. con .NE. socto un altro et sono base equidistante; seguita loro essere in una proportione, commo per la 5^a di questo se prova, che è il proposto ¹).

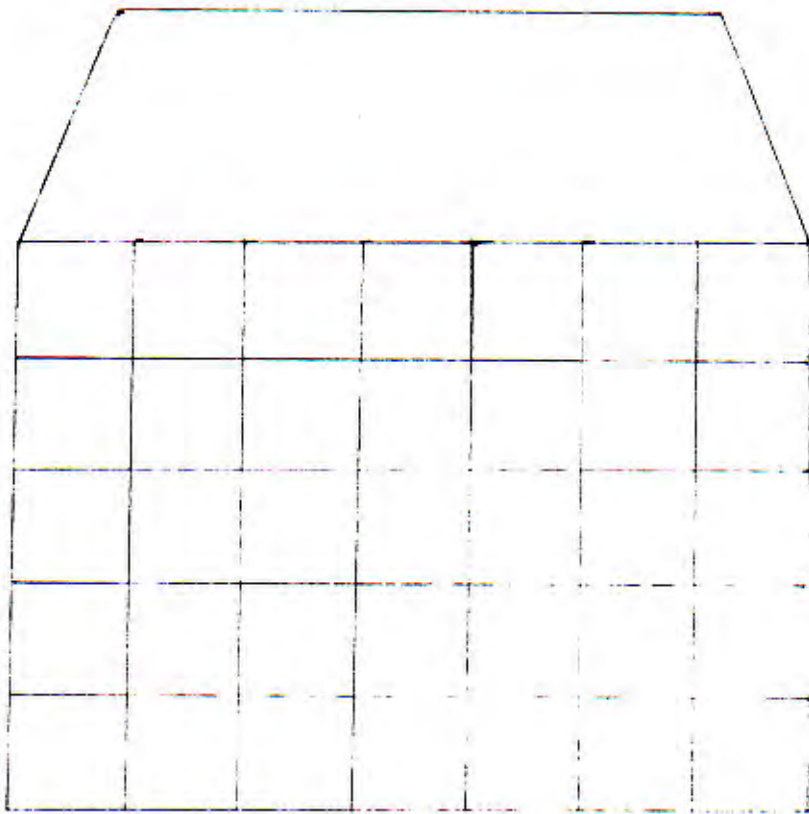


Letture dal *De Prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca (1460?)



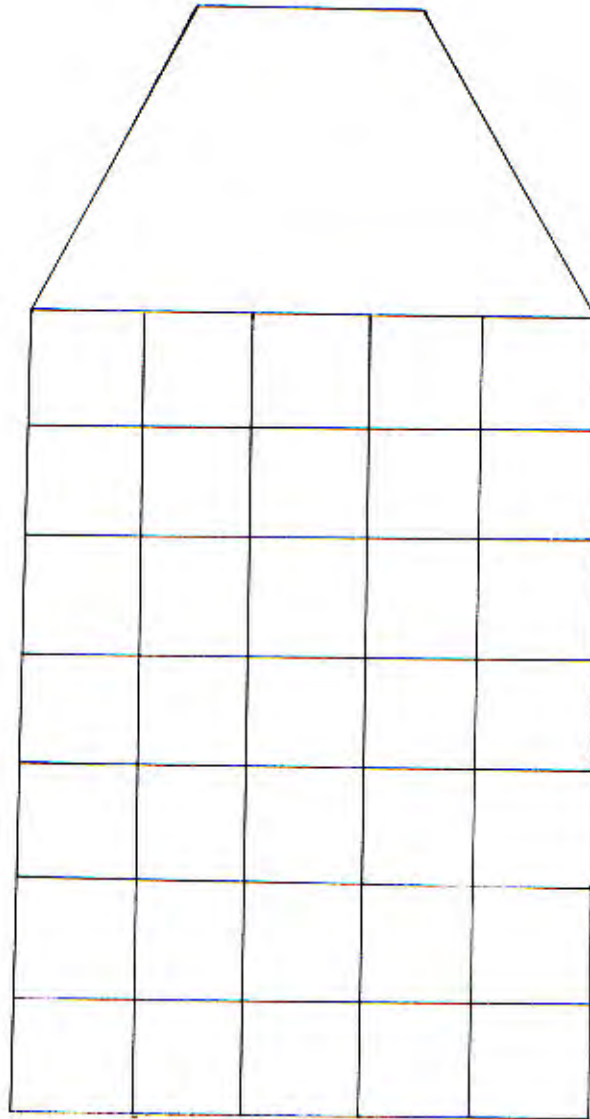
Disegna la tovaglia quadrettata sul tavolo disegnato in prospettiva.
Spiega il tuo ragionamento.

tavola 6



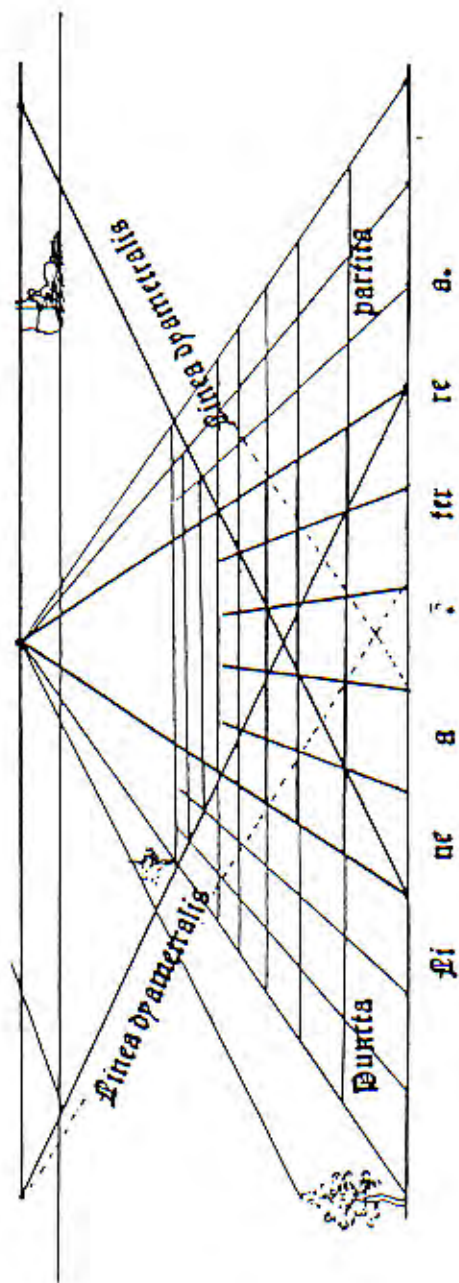
Un pittore sta disegnando il pavimento di una stanza rettangolare di 5m per 7 m.
Vedi il pavimento disegnato in pianta e il contorno del pavimento disegnato in prospettiva
con il lato frontale di 7 m.
Aiutalo a finire il lavoro
Spiega il tuo ragionamento.

tavola 7



Un pittore sta disegnando il pavimento di una stanza rettangolare di 5m per 7 m.
Vedi il pavimento disegnato in pianta e il contorno del pavimento disegnato in prospettiva
con il lato frontale di 5 m.
Aiutalo a finire il lavoro
Spiega il tuo ragionamento.

tavola 8



Il metodo di Pélérin (1509)

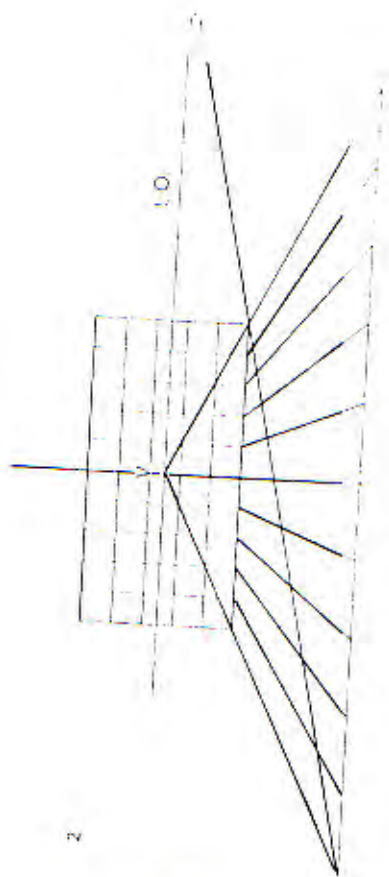
tavola 9

La stanza a griglia

Questa esercitazione può sembrare più impegnativa delle precedenti, ma in realtà non presenta eccessive difficoltà. Si tratta di preparare il tracciato prospettico di una stanza che può servire, ad esempio, per una composizione di mobili d'arredamento. Per semplicità abbiamo posto il Punto principale V proprio al centro della parete di fondo.

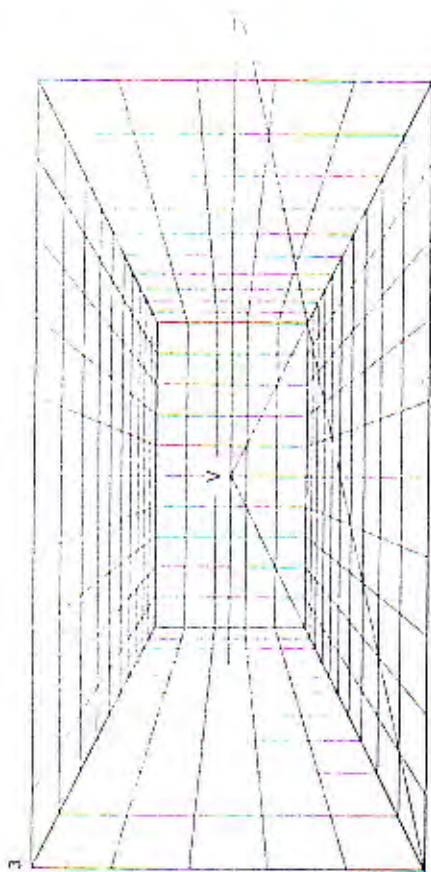


1. Disegnate un rettangolo (che rappresenterà la parete di fondo della stanza) e suddividetelo secondo una griglia quadrata. Vi suggeriamo di scegliere le dimensioni di 10×5 cm per il rettangolo, e di 1 cm per la griglia. Tracciate la L.O. che passa esattamente a metà del rettangolo.

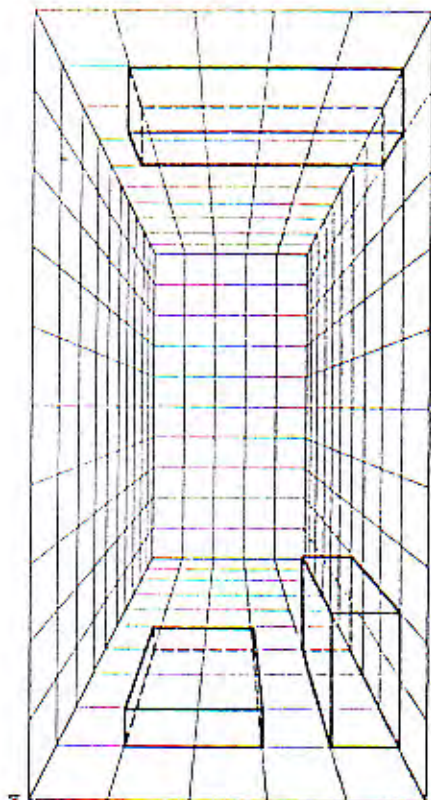


2. Fissate il Punto principale V al centro del rettangolo, quindi il Punto di distanza D. Seguendo lo schema del testo, conducete da questi due punti le linee che, incrociandosi, daranno origine al pavimento della stanza.

Segui le istruzioni (1)



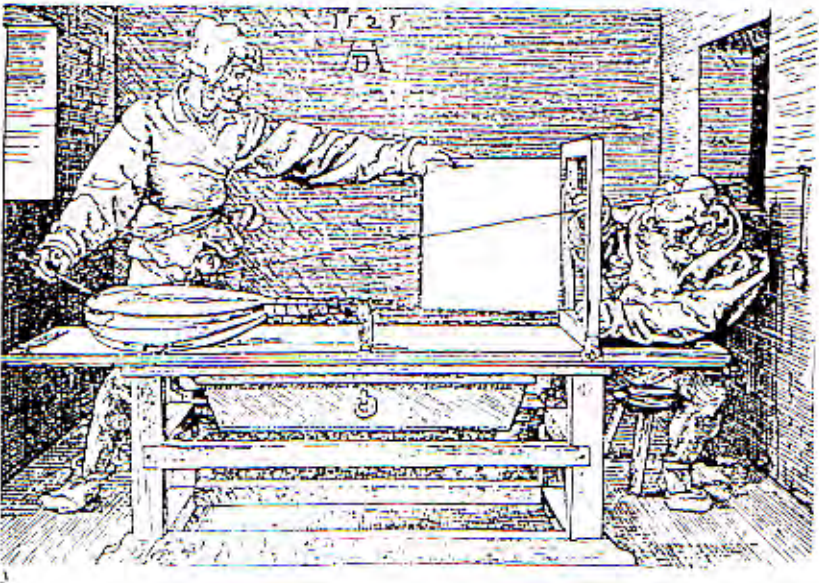
3. Completate la griglia del pavimento tracciando le linee orizzontali in corrispondenza degli incroci con le linee prospettiche. Tracciate poi le pareti laterali e il soffitto della stanza.



4. Cancellate le linee di costruzione e ripassate le altre: la stanza «a griglia» è pronta per essere utilizzata. Prima di procedere all'inserimento di oggetti nella stanza, come nella figura del testo, vi suggeriamo di fare alcune fotocopie del vostro disegno, e di lavorare su queste.

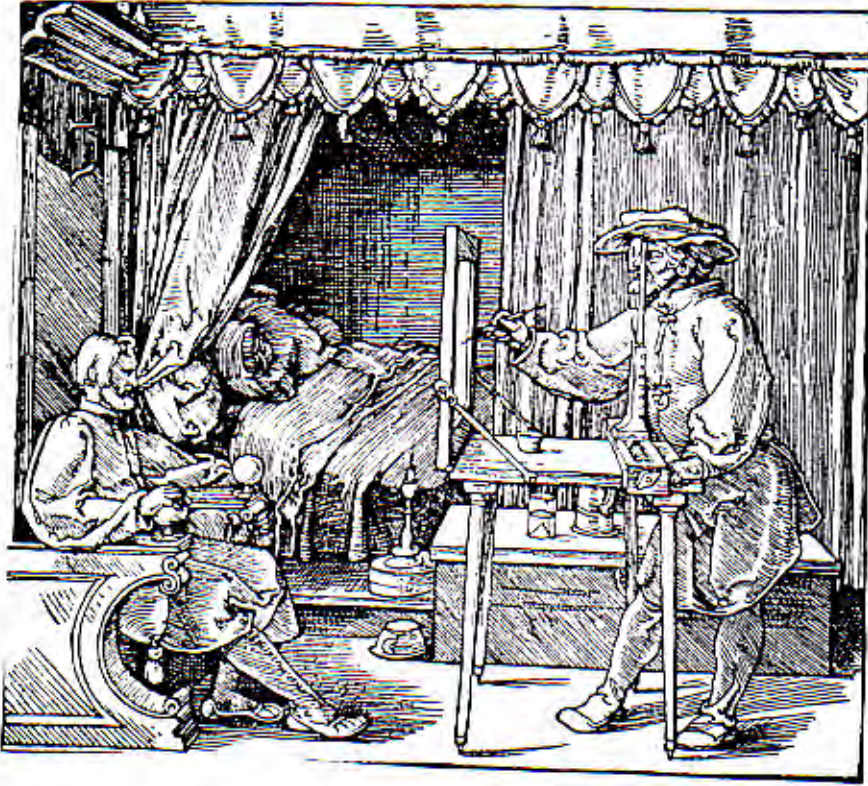
Segui le istruzioni (2)
Poi disegna una stanza ed arredala a tuo piacere.

tavola 11



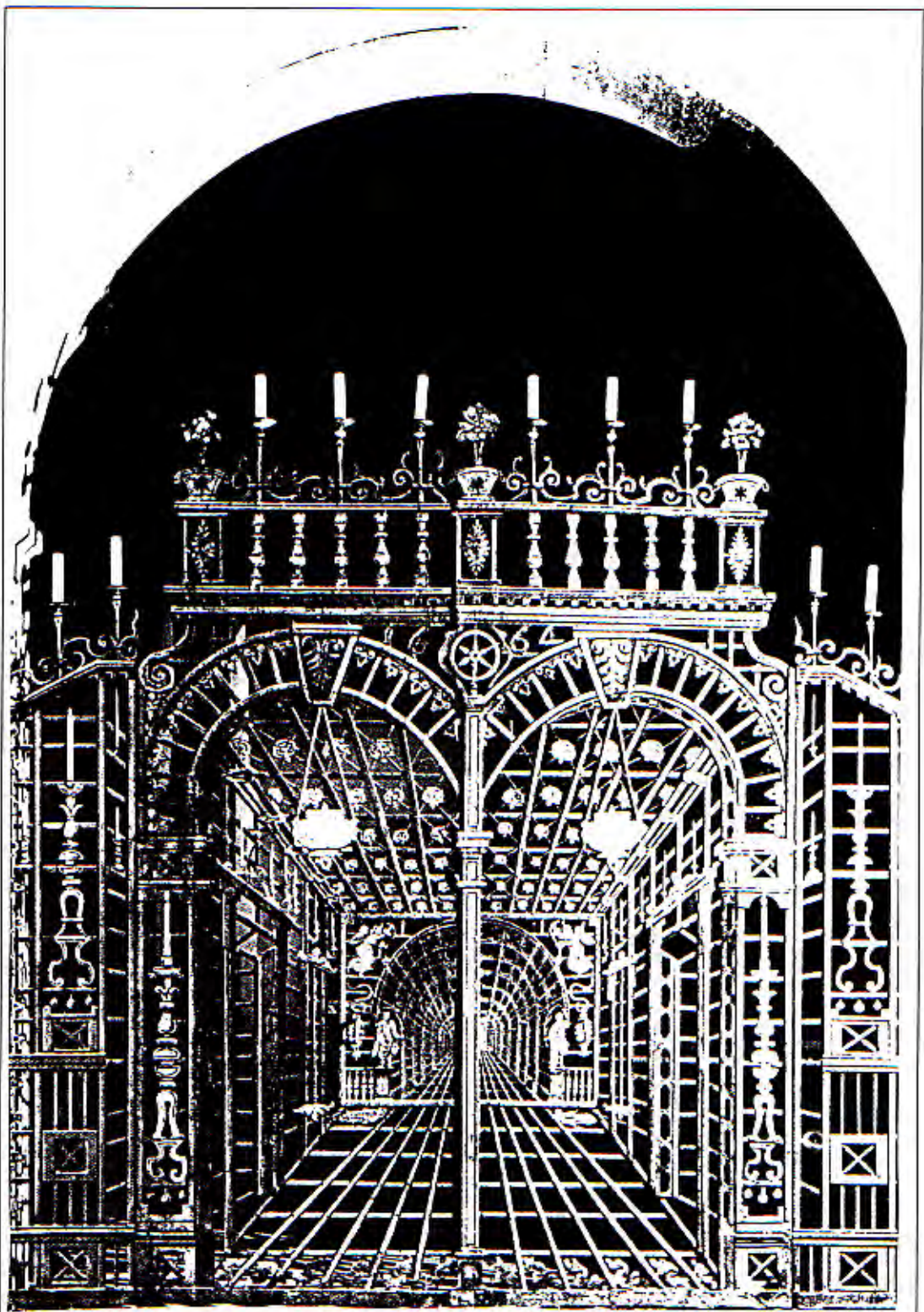
Prospettografi (da Dürer)

tavola 12



Prospettografo (da Dürer)

tavola 13



Il cancello prospettico della Cattedrale di St. Peter ad Osnabrück.

**MODENA - HOTEL FINI
7 GENNAIO 1988 - DALLE ORE 20,30**



I GRANDI MAESTRI DI SCACCHI

**ALEXANDER BELJAVSKI
RAFAEL VAGANIÀN
VLADIMIR TUKMAKOV**

SFIDERANNO IN SIMULTANEA 75 GIOCATORI

patrocinato dal

bsgsp

**BANCO
S.GEMINIANO
E S.PROSPERO**

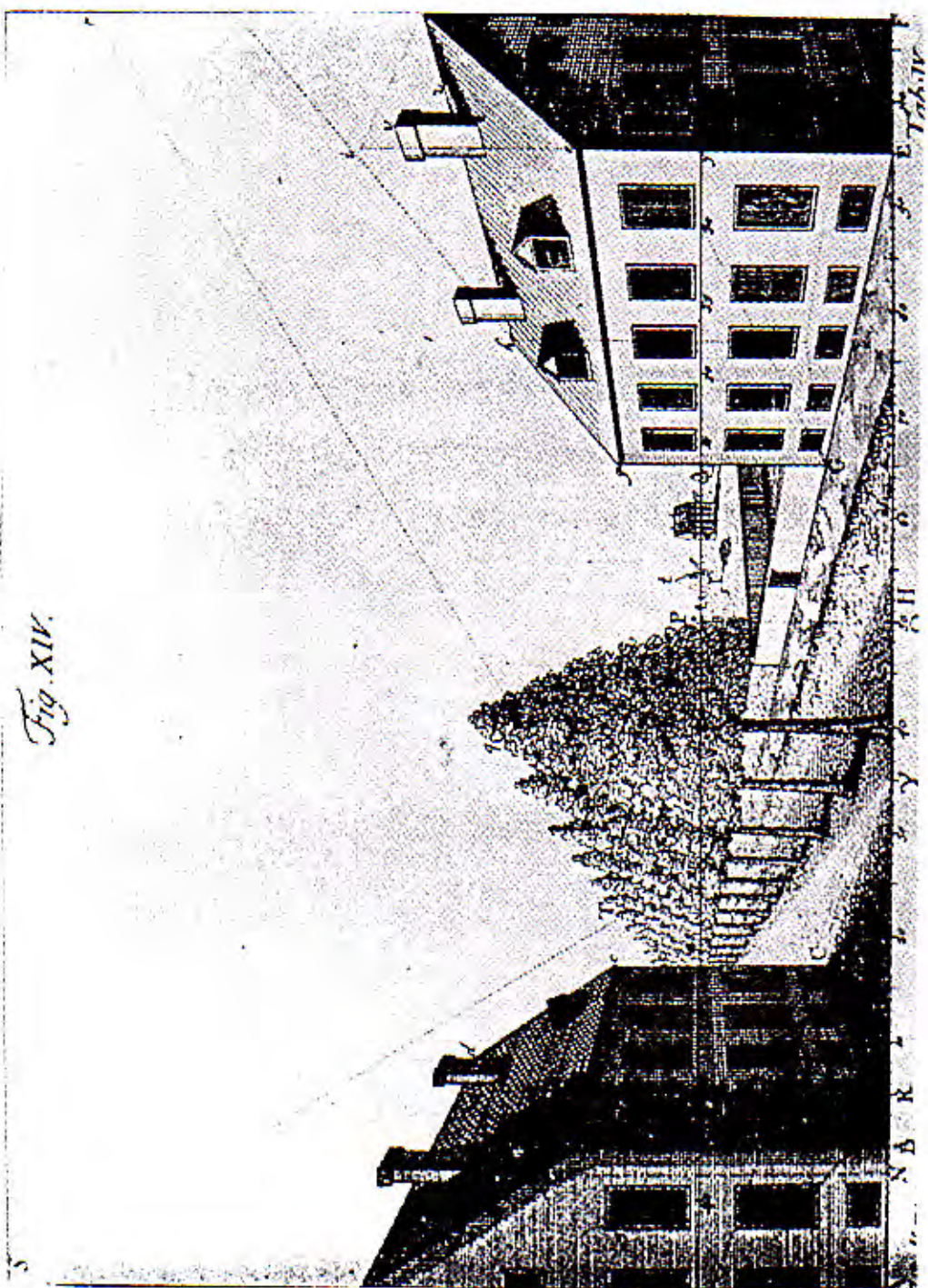
La scacchiera.
Ricopiala e disegnane una grande il doppio.
Spiega tutti i ragionamenti che fai.

tavola 15



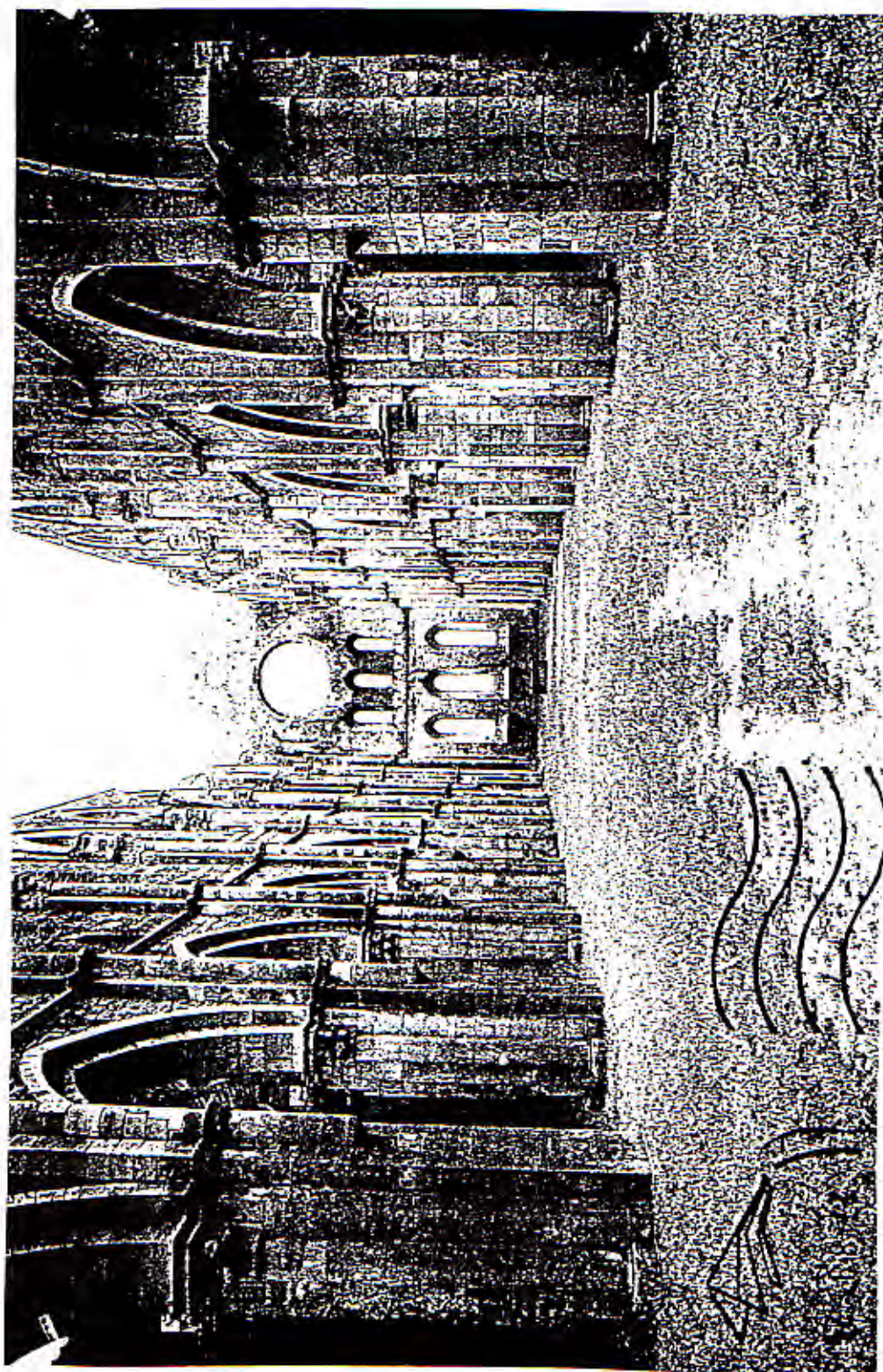
Viale alberato (1).

tavola 16



Viale alberato (2)

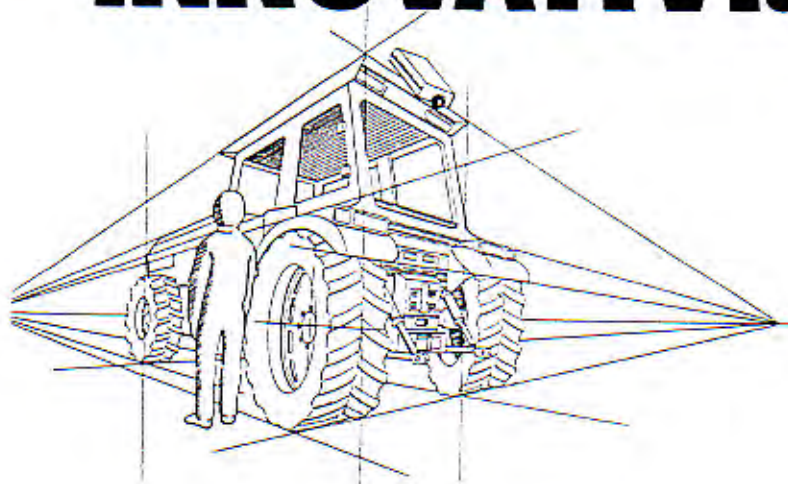
tavola 17



La chiesa di S. Galgano.

tavola 18

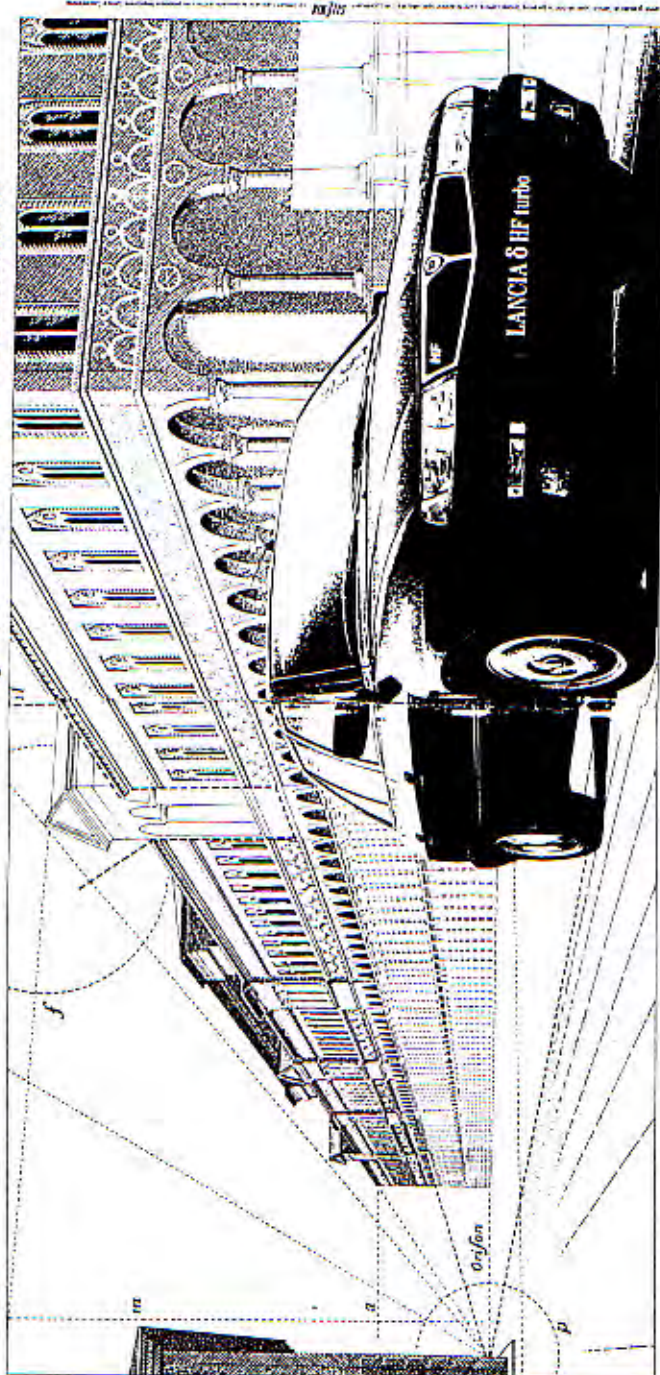
PUNTI DI VISTA INNOVATIVI.



Prospettiva e pubblicità (I)

tavola 19

La forza: 190 CV con Viscodrive. La quiete: interni in Alcantara.



Lancia 8 HF turbo La potenza è il suo lato più affascinante. L'eléganza è il suo punto di forza. La sicurezza è il suo pregio nascosto. Da un nuovo equilibrio tra scurezza e piacere nasce l'uso più emozionante che abbiate mai guidato.

Sicurezza sovraccaricata, strada collaudabile, cinture di sicurezza con pretensionatore, air-bag, ABS.

Comfort: sedili anatomici Riccio in Alcantara*, sospensioni a ammortamento controllato, climatizzatore.

Prestazioni: turbocompressore con intercooler, albero motore a Viscodrive, 190 CV DIN, 220 km/h.

Lancia 6 2.0 HF, turbo 190 CV DIN - 1.8, 105 CV DIN - 1.6, 76 CV DIN.

Lancia  Il Granturismo.

Prospettiva e pubblicità (2)

tavola 20

4. Alcuni sviluppi.

4.1. Verso la dimostrazione.

Nella classe di Franca Ferri, si è pianificato e osservato un interessante sviluppo del progetto verso la dimostrazione. Il problema del tavolo e della pallina è stato riproposto alla fine del percorso con una consegna leggermente diversa:

Disegna la pallina al centro del tavolo.
Dimostra il metodo che hai usato.

Lo scopo era quello di verificare se l'esperienza di argomentazione da un lato (testi individuali, interventi in discussione 'per convincere') e di modelli di ragionamento nei quali la giustificazione è offerta attraverso la costruzione di catene di ragionamenti (ad esempio nella soluzione collettiva del problema 9 del tavolo e della tovaglia) aveva messo gli allievi in grado di produrre un ragionamento argomentativo che non facesse riferimento all'esperienza diretta ma ad altre proprietà già accettate.

La giustificazione del metodo delle diagonali può essere fatta in questo modo:

So che in prospettiva:
(1) si conserva l'allineamento (le rette si trasformano in rette);
(2) si conserva l'appartenenza di un punto ad una retta (un punto su una retta va in un punto sulla retta corrispondente).
Dunque:
La palla nella realtà è nel centro del piano del tavolo (cioè nel punto di incontro delle diagonali del rettangolo).
Per la (1) le diagonali del rettangolo (piano del tavolo vero) si trasformano nelle diagonali del quadrilatero (piano del tavolo disegnato in prospettiva).
Per la (2) il punto comune alle diagonali del rettangolo si trasforma nel punto comune alle diagonali del quadrilatero.
Quindi la pallina va disegnata nel punto d'incontro delle diagonali del quadrilatero che rappresenta il piano del tavolo in prospettiva.

Non c'è più riferimento al controllo empirico sulla fotografia: la giustificazione è basata su altre proposizioni accettate come evidenti (vedi la tabella degli invarianti: § 3.2.4). Una descrizione di questa parte dell'esperimento è in Costa, Ferri, Garuti in stampa.

4.2. Il prospettografo.

Nella classe di Anna Mucci è stata curato uno studio dettagliato del prospettografo (vedi tavole 12 e 13 del § 3.3). I prospettografi sono semplici strumenti meccanici che consentono di realizzare il disegno in prospettiva senza il ricorso a regole geometriche complicate. Il più semplice prospettografo è quello costituito da un oculare ed un vetro trasparente. Sul vetro, guardando attraverso l'oculare, il disegnatore traccia direttamente l'immagine dell'oggetto da riprodurre posto oltre il vetro.

Il prospettografo è uno strumento della pratica pittorica (descritto da Leonardo, Alberti, Dürer, utilizzato dal protagonista del film *I misteri del giardino di Compton House* ecc.) ed una concretizzazione del modello matematico del disegno in prospettiva:

[la pittura è] non altro che intersecazione della piramide visiva, secondo data distanza, posto il centro e costituiti i lumi, in una certa superficie con linee e colori *artificiose* rappresentata.

Una descrizione accurata dell'esperimento, che fa estensivo ricorso al confronto attivo di testi da parte degli allievi, è in corso di redazione (Ferri in preparazione).

4.3. Il mondo esterno.

Un classico della rappresentazione prospettica sono i viali alberati. Su fotografie e disegni di viali alberati (vedi tavole 15 e 16 del § 3.3) si possono studiare molti interessanti problemi geometrici.

Un esperimento in questo senso è in corso nelle classi di Cinzia Fortini.

5. La prospettiva per gli insegnanti.

Nelle pagine seguenti è riportato un breve estratto delle regole della prospettiva. Si consiglia comunque la lettura di un buon testo di disegno della scuola media superiore.

Nella sua essenza, la prospettiva lineare è un sistema per tracciare su un piano la configurazione dei raggi luminosi che si estendono da un oggetto all'occhio secondo uno schema piramidale. Questo sistema è illustrato nel primo grafico (fig. 552 A) secondo un modello fondamentale ben noto a qualsiasi artista del Rinascimento. Si immagini un osservatore posto in F, con l'occhio in E, che osserva un pavimento a scacchiera attraverso un piano trasparente (ABCD). Dei raggi che si estendono dall'occhio ai punti A, B, X e Y, quelli che raggiungono i punti X e Y intersecano, o attraversano, il piano di sezione in X' e Y'. Mentre la retta AB si vedrà invariata sul piano, la retta XY apparirà come in X'Y'. Congiungendo A con X' e B con Y', si ottiene sul piano la configurazione apparente dei lati del pavimento. Prolungando questi lati proiettati, essi si incontrano in V, che è anche il punto in cui una linea tirata dall'occhio incontra il piano perpendicolarmente.

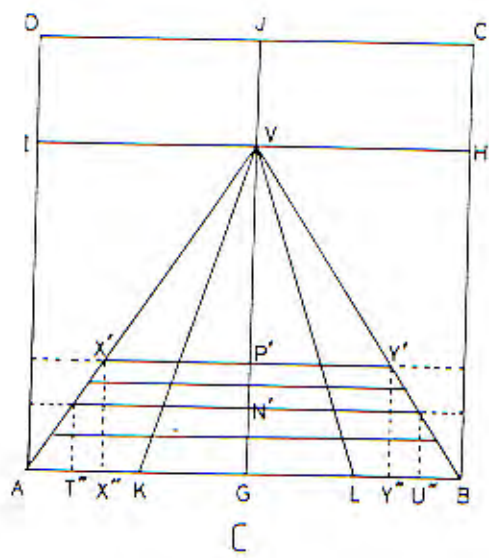
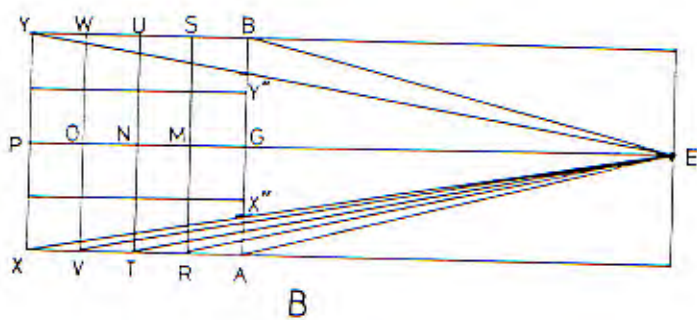
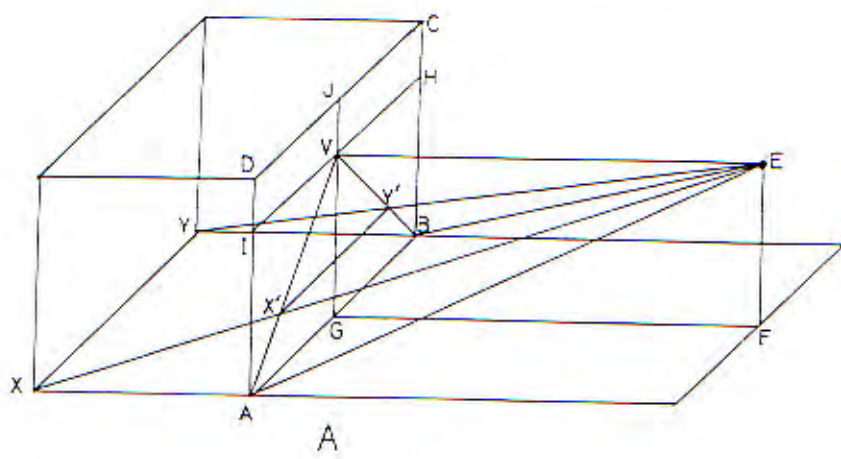
La principale terminologia adottata è la seguente: E è il 'punto di vista' ed EV la 'distanza visiva' presa sull'asse visivo'; ABCD è il 'quadro' o 'intersezione'; V è il 'punto di convergenza' o, come verrà chiamato più tardi, il 'punto di fuga'; la retta orizzontale passante per V (HVI), è 'l'orizzonte'; le linee come X'Y', parallele alla base del quadro, sono dette 'orizzontali' (o, talvolta, 'trasversali'), e le proiezioni convergenti delle parallele AX e BY, rappresentate da AX' e BY', sono le 'ortogonali'.

Il sistema che stiamo trattando è una forma di proiezione geometrica di un oggetto tridimensionale su una superficie piana. Uno dei primi modi convenzionali di effettuare questa proiezione, è attraverso due passaggi separati che operano in pianta e in prospetto. Immaginiamo il nostro modello in pianta (fig. 552 B); tratteremo sul quadro AB le intersezioni dei raggi proiettati da R, T, V, X ecc. La posizione di questi punti (X", Y" ecc.) sarà riportata lungo la base del quadro (come in figura 552 C). Ci spostiamo quindi sul prospetto, o veduta laterale (fig. 552 D), e tracciamo le intersezioni di M,

N, O e P in P', N' ecc. Anche queste verranno segnate sul quadro, e precisamente sulla verticale passante per G (fig. 552 C). Una volta trasferiti i punti della prima costruzione (fig. 552 B) sulla base AB, e quelli della seconda (fig. 552 D) sulla verticale centrale GJ, essi forniscono rispettivamente le coordinate verticali e orizzontali per il posizionamento sul quadro dei punti X, Y, T, U ecc. I punti proiettati sono localizzati dalle intersezioni delle coordinate corrispondenti (fig. 552 C). Le ortogonali da A e B possono ora essere facilmente tracciate attraverso i punti proiettati e prolungate fino al punto di fuga V, attraverso il quale si può disegnare la linea di orizzonte. I restanti elementi del pavimento a scacchiera, le proiezioni delle rette per K ed L, si potrebbero in teoria ottenere ripetendo il procedimento B, ma per ragioni pratiche congiungeremo semplicemente questi punti col punto di fuga V. Avremo così costruito il pavimento a scacchiera nella sua forma proiettata (fig. 552 E). Vi sono modi abbreviati di giungere allo stesso risultato, ma il procedimento completo aiuta a comprendere meglio il meccanismo dell'intersezione.

Quando osserviamo la configurazione risultante, emergono alcune conseguenze interessanti. Le diagonali tracciate attraverso i riquadri proiettati si incontreranno esattamente in due punti laterali (Z^1 e Z^2 nella fig. 552 F). La distanza da ognuno di questi punti (talvolta chiamati 'punti di distanza') al punto di fuga sarà uguale alla iniziale distanza dell'osservatore EV. Questi punti laterali sono molto importanti, sia perché essi furono largamente impiegati dagli artisti, sia perché ci consentono di ricostruire facilmente la distanza visiva ogni volta che in un'opera d'arte disponiamo di un quadrato in scorcio. Le diagonali forniscono anche l'orientamento degli oggetti le cui facce sono disposte a 45° rispetto al quadro.

Comprendere questi procedimenti non è difficile ma richiede un po' di attenzione e pazienza. Essi possono essere acquisiti nel modo migliore, praticando i passaggi fondamentali con un foglio di carta, una matita e un righello.



552 Dimostrazione degli elementi fondamentali della prospettiva lineare.

A. *Modello fondamentale*

FE: osservatore

ABCD: quadro o intersezione

EV: distanza dell'osservatore

AXYB: quadrato da proiettare

X appare sul quadro in X'

Y appare sul quadro in Y'

Perciò X'Y' rappresenta la proiezione di XY.

AX' e BY' sono prolungate fino ad incontrarsi in V (punto di fuga).

HI è tracciata come linea d'orizzonte al livello dell'occhio dell'osservatore posto in E.

B. *Pianta del modello*

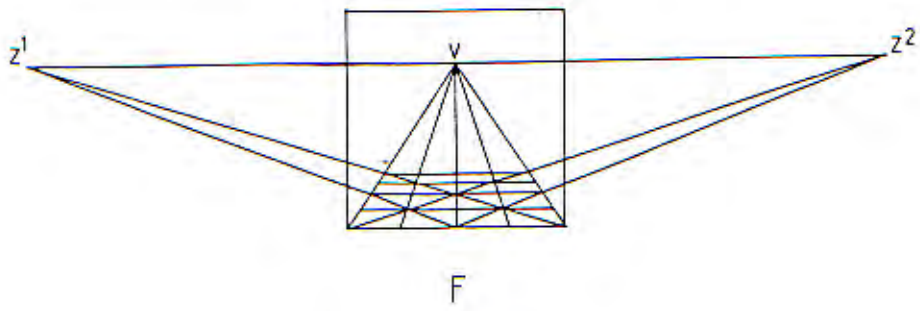
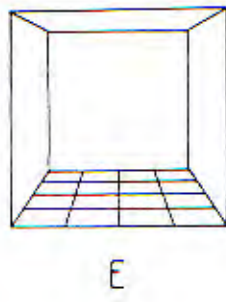
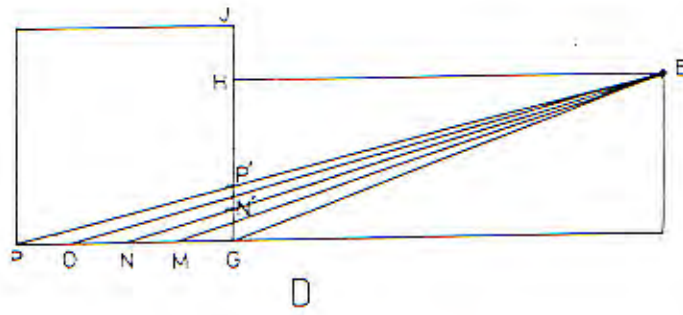
AXYB è un quadrato suddiviso in sedici piccoli riquadri dalle linee WOV, UNT ecc.

Y, X, V, T vengono uniti ad E, e i punti di intersezione su AB vengono segnati come Y", X", ecc.

C. *Il quadro (o intersezione)*

I punti T", X", Y", U" ecc. vengono segnati nelle loro posizioni equivalenti al modello B sulla base AB (linea di terra).

Sull'asse verticale centrale si segnano i punti P', N' ecc., presi dalla figura D. Le intersezioni delle coordinate orizzontali e verticali T", X", Y" e U" e P', N' ecc., forniscono le posizioni di X', Y' ecc.



D. Prospetto del modello

G: punto centrale della base del quadro

I punti P, O, N, M vengono uniti ad E, e i punti di intersezione sulla verticale passante per G, vengono indicati con P', N' ecc.

E. Il pavimento a scacchiera in proiezione prospettica

Con le 'pareti laterali' e il 'soffitto' dell'intero cubo spaziale.

F. I 'punti di distanza' Z^1 e Z^2

Si osservi che: $Z^1V = Z^2V = EV$ (fig. 1A).

6. Alcuni problemi operativi.

6.1. Quando la classe non risponde come ci si aspetta

Molto spesso nella preparazione di una discussione di bilancio l'insegnante si rende conto che la classe non ha prodotto la varietà e la ricchezza di soluzioni previste nell'analisi a priori: mancano casi significativi e a volte anche argomentazioni significative.

Una buona tecnica in questi casi è l'introduzione della fonte esterna, nella forma di un testo scritto da un allievo di un'altra classe (vero o eventualmente simulato dall'insegnante in una forma verosimile). Questa tecnica permette di introdurre una voce 'paritetica' nella discussione.

6.2. Quando l'insegnante non approfitta delle occasioni.

Molto spesso l'insegnante si accorge, nel corso della sbobinatura della discussione o in una successiva fase di analisi della trascrizione, che qualche intervento molto significativo di un allievo non è stato valorizzato dall'insegnante ed è quindi sfuggito dalla memoria collettiva. Questa situazione è molto più frequente di quanto si immagini, anche per insegnanti esperti, per la difficoltà reale di tenere sotto controllo le troppe variabili implicate nell'interazione di grande gruppo su un problema aperto.

L'intervento può essere ripreso successivamente, attraverso la riletture di brani scelti della discussione, proposta agli allievi stessi. In modo sistematico e intenzionale, senza ansia, l'insegnante fa rileggere il brano ed orienta di nuovo la discussione sul tema desiderato.

6.3. La storia della classe.

La istituzionalizzazione del valore della storia personale dell'allievo nella storia della classe (e nella storia dell'umanità) ha un segno esterno: il grande quaderno ad anelli dove trovano spazio tutte le prove individuali (copie di quelle qui proposte riprodotte in formato A4), le letture e le copie delle discussioni (o di brani di esse) fornite agli allievi dall'insegnante. La necessità di un formato uniforme è legata ai problemi di questa archiviazione.

Questo quaderno è la memoria personale e collettiva del percorso compiuto. Su questo quaderno gli allievi saranno guidati a ripercorrere la propria storia fino a che questo atteggiamento non diventerà 'spontaneo'.

6.4. L'osservazione dei processi individuali degli allievi.

Appare difficile all'insegnante 'tenere sotto controllo' lo sviluppo dei processi individuali. Noi abbiamo sperimentato con successo il tabellone a doppia entrata: per righe entrano i singoli allievi; per colonne le singole fasi del percorso; ogni colonna è ulteriormente suddivisa in colonne ciascuna delle quali evidenzia un aspetto particolare da tenere sotto osservazione. Ad esempio, per il problema del tavolo e della pallina (§ 3.2.1) si hanno le colonne:

RAPPRESENT. MONDO VISIBILE	Il tavolo e la pallina			
	stima ad occhio	misura	diagonale	argomentato SI / NO
allievo				
1				
2				

Questo grande tabellone consente di avere sotto controllo sia gli allievi, per righe, che le singole fasi del percorso, per colonne.

Capitolo 3

Antologia

In questo capitolo riportiamo in ordine alfabetico alcune voci tratte da testi di autori classici o tradotte in italiano per questa occasione. Si tratta solo di spunti che invitano alla lettura più approfondita delle opere da cui sono tratti. L'elenco dei volumi di riferimento è contenuto nel Capitolo 4.

ATTIVITÀ - AZIONI - OPERAZIONI

(Leont'ev)

L'ATTIVITÀ è un'unità molare, non additiva, della vita del soggetto corporeo materiale. In un senso più stretto, cioè sul piano psicologico, è l'unità della vita mediata dal rispecchiamento psichico, la cui funzione reale consiste nell'orientare il soggetto nel mondo oggettivo. In altri termini, l'attività non è una reazione, né un insieme di reazioni, ma un sistema che ha una struttura, ha suoi passaggi e trasformazioni interne, un suo sviluppo.

(p. 67)

L'attività di ogni singolo uomo dipende dal suo posto nella società, dalle condizioni che gli toccano in sorte, e da come essa si viene svolgendo nelle condizioni individuali irripetibili. Bisogna porsi particolarmente in guardia contro la concezione dell'attività umana intesa come un rapporto esistente tra l'uomo e la società che gli sta di fronte. Ciò va rilevato, in quanto le concezioni positivistiche, che oggi inondano la psicologia, vanno in ogni modo diffondendo l'idea della contrapposizione dell'individuo umano nei confronti della società. Come se, per l'uomo, la società fosse soltanto quell'ambiente esterno, al quale egli deve adattarsi, per non risultare "disadattato" e sopravvivere, nello stesso modo in cui un animale è costretto ad adattarsi all'ambiente naturale esterno. Da questo punto di vista l'attività dell'uomo si forma in risultato del suo rafforzamento, sebbene non diretto (per esempio attraverso la valutazione espressa dal gruppo "di riferimento"). Con questo si trascurava la cosa fondamentale, che, cioè, nella società, l'uomo trova non semplicemente delle condizioni esterne alle quali deve adattare la sua attività, ma che queste stesse condizioni sociali portano in sé i motivi e gli scopi della sua attività, i suoi strumenti e mezzi; in una parola, che la società produce l'attività degli individui che la compongono.

(p. 69)

[dopo una discussione sulla # INTERIORIZZAZIONE]

Oggi assistiamo a un sempre maggiore avvicinamento e a una maggiore connessione dell'attività esterna e di quella interna: il lavoro fisico che compie la trasformazione pratica degli oggetti "cosali" si "intellettualizza" sempre maggiormente e racchiude in sé l'esecuzione delle più complesse azioni mentali; al tempo stesso il lavoro del ricercatore contemporaneo, l'attività specificamente conoscitiva, mentale per eccellenza, viene sempre maggiormente eseguita da processi che, per la loro forma, sono azioni esterne. Tale unificazione di processi di attività di forma diversa non può essere interpretata come risultato di quei soli passaggi che sono descritti dal termine di interiorizzazione dell'attività esterna. Essa presuppone necessariamente l'esistenza di passaggi, che si attuano costantemente anche nella direzione opposta, dall'attività interna a quella esterna [*]. Nelle condizioni sociali che assicurano lo sviluppo completo delle persone, l'attività mentale non è isolata da quella pratica. [...] I passaggi scambievoli di cui si tratta costituiscono l'importantissimo movimento dell'attività oggettuale umana nel suo sviluppo storico e ontogenetico. Questi passaggi sono possibili perché *l'attività esterna e interna hanno lo stessa struttura comune*. La scoperta della comunità della loro struttura mi pare come una delle scoperte più importanti della scienza psicologica contemporanea [**].

(p. 85 - 6)

[...]

I singoli aspetti concreti dell'attività possono essere distinti tra loro per una qualsiasi caratteristica: per la forma, per il modo con cui si verificano, per la loro tensione emotiva, per le loro caratteristiche spaziali e temporali, per i loro meccanismi fisiologici, ecc. Tuttavia la cosa

fondamentale che distingue un'attività dall'altra è data dalla diversità dei loro oggetti. Proprio l'oggetto dell'attività le conferisce una certa direzione. In base alla terminologia che ho proposto, oggetto dell'attività è il suo motivo effettivo. S'intende che esso può essere sia cosale che ideale, dato sia tramite la percezione che esistente solo nella rappresentazione, nel pensiero. La cosa fondamentale è che dietro di esso sta sempre un bisogno e che esso risponde sempre a un bisogno determinato.

Così il concetto di attività è necessariamente connesso con il concetto di motivo. Non c'è attività senza motivo: l'attività "immotivata" è attività non priva di motivo, ma attività con un motivo nascosto, sia dal punto di vista soggettivo che oggettivo.

I componenti fondamentali delle singole attività dell'uomo sono le azioni che essi compiono. Definiamo **AZIONE** il processo subordinato alla rappresentazione del risultato che deve essere perseguito, cioè il processo subordinato ad uno scopo cosciente. Così come il concetto di motivo è correlato con quello di attività, il concetto di scopo è connesso a quello di azione.

Il sorgere, nell'attività, di processi orientati in vista di uno scopo, delle azioni, è risultato una conseguenza storica dell'inizio della vita dell'uomo nella società. L'attività dei partecipanti ad un lavoro collettivo è stimolata dal suo prodotto, che inizialmente risponde immediatamente al bisogno di ciascuno di loro. Tuttavia lo sviluppo della forma, anche più elementare, della divisione tecnica dei compiti, comporta necessariamente la distinzione di risultati intermedi, parziali, che sono conseguiti da singoli partecipanti all'attività di lavoro collettiva, ma che, di per se stessi, non sono in grado di soddisfare i loro bisogni. Tali bisogni vengono soddisfatti non da questi risultati "intermedi", ma dall'intero prodotto della loro completa attività, ottenuto da ognuno di essi, in virtù dei rapporti che li collegano l'uno con l'altro e che sorgono nel processo di lavoro, in virtù, cioè, dei rapporti sociali.

[...]

La discriminazione degli scopi e la formazione delle azioni che sono a questi subordinate comporta il fatto che si verifichi quasi una disgregazione tra funzioni precedentemente fuse tra loro nel motivo. Certo, la funzione della stimolazione si conserva completamente nel motivo. Diversamente accade con la funzione della direzione: le azioni che realizzano l'attività, che sono stimolate dal suo motivo, ma che sono dirette ad uno scopo.

[...]

La distinzione di azioni rivolte a uno scopo, come componenti il contenuto di attività concrete, pone naturalmente il problema dei rapporti interni che li collegano. Come si è già detto, l'attività non è un processo additivo. Di conseguenza, le azioni non sono delle sequenze singole che vadano incluse nella composizione dell'attività. L'attività umana non esiste altrimenti che nella forma dell'azione, o dello scopo delle azioni. L'attività lavorativa, per esempio, esiste nelle azioni del lavoro [...], se con il pensiero si estraiono dall'attività le azioni che la compongono, dell'attività non resta nulla. Ciò si può esprimere in altre parole: quando davanti a noi si svolge un processo concreto - esterno o interno - dal punto di vista del suo rapporto con il motivo, si presenta come un'attività dell'uomo e, in quanto subordinato a uno scopo, in qualità di azione, o di insieme, catena di azioni.

Al tempo stesso l'attività e le azioni rappresentano delle realtà autentiche e perciò non coincidenti. Una stessa azione può far parte di diverse attività, può passare da un'attività ad un'altra, ritrovando in tal modo la sua autonomia relativa.

[...]

L'attività si compie solitamente attraverso un insieme di azioni, subordinantisi a scopi parziali, che possono distinguersi da uno scopo comune, in questo caso è caratteristico per i livelli più alti di sviluppo il fatto che la funzione dello scopo comune è di dare soddisfazione al motivo divenuto cosciente, che in virtù del suo essere divenuto cosciente, si tramuta in motivo - scopo.

Una delle questioni che sorgono a questo punto è quella della formazione dello scopo. E' un problema psicologico molto grande. Il fatto è che dal motivo dell'attività dipende soltanto la zona degli scopi oggettivamente adeguati. L'individuazione soggettiva dello scopo (cioè la coscienza del risultato più prossimo, il cui ottenimento pone in atto una data attività capace di soddisfare il

bisogno oggettivato nel suo motivo) rappresenta un processo particolare quasi non studiato. Nelle condizioni di laboratorio, o nell'esperimento pedagogico, abbiamo sempre posto al soggetto uno scopo, per così dire "pronto": perciò proprio il processo della formazione dello scopo sfugge, di solito, al ricercatore. [...] E' un'altra cosa nella vita reale, in cui la formazione dello scopo appare il momento principale del movimento di qualche attività del soggetto. [...]

Gli scopi non si rinvengono e non si pongono intenzionalmente da parte del soggetto. Essi sono dati nelle condizioni oggettive. Al tempo stesso, l'individuazione e la presa di coscienza degli scopi rappresenta non un atto momentaneo e automatico, ma un processo relativamente prolungato di *verifica degli scopi con l'azione* e della loro, se così è consentito esprimersi, effettuazione oggettiva. L'individuo, osserva giustamente Hegel, non può definire lo scopo del suo agire, fintanto che non agisce.

[...]

Accanto al suo aspetto intenzionale (che cosa deve essere ottenuto), l'azione ha un suo aspetto operativo (come, in che modo, ciò può essere ottenuto), che è definito non dallo scopo per se stesso, ma dalle condizioni oggettive concrete del suo raggiungimento. [...] I modi per la realizzazione dell'azione sono ciò che io definisco **OPERAZIONI**.

I termini "azione" e "operazione" spesso non vengono distinti. Tuttavia nel contesto dell'analisi psicologica dell'attività, è affatto indispensabile una loro precisa distinzione. Le azioni, come abbiamo già detto, sono relative agli scopi, le operazioni alle condizioni. Poniamo che lo scopo rimanga invariato, mentre si modifichi la condizione in cui esso è dato, si modifica in questo caso propriamente e solamente la componente operativa dell'azione.

La non coincidenza di azione e operazione si manifesta in modo particolarmente evidente nelle azioni strumentali. Lo strumento è, evidentemente, l'oggetto materiale nel quale sono cristallizzati per l'appunto i modi, le operazioni e non le azioni, gli scopi. [...] Poniamo che per qualcuno sia sorto lo scopo di rappresentare graficamente delle relazioni da lui trovate. Per far ciò, egli deve usare un certo metodo per la costruzione dei grafici, attuare determinate operazioni e per questo deve essere capace di compierle a questo fine è indifferente in che condizioni e con quale materiale egli abbia appreso queste operazioni, l'importante è un'altra cosa, e cioè che la formazione delle operazioni avviene in modo completamente diverso dalla formazione dello scopo, e cioè dalla genesi delle azioni.

Azioni ed operazioni hanno una diversa genesi, una diversa dinamica e un diverso destino. La genesi dell'azione risiede nei rapporti di scambio delle attività, mentre ogni operazione è il risultato della trasformazione dell'azione, che avviene per via della sua inclusione in un'altra azione e per la sua progressiva "tecnicizzazione". [...] In generale, il destino dell'operazione diventa, prima o poi, la funzione della macchina.

[...]

Nel generale flusso dell'attività che costituisce la vita umana, nelle sue manifestazioni superiori, mediate dal rispecchiamento psichico, l'analisi individua inizialmente delle singole (specifiche) attività, secondo il criterio del motivo che le stimola. In seguito si distinguono delle azioni in quanto processi subordinanti a scopi coscienti; infine, operazioni che dipendono immediatamente dalle condizioni per l'ottenimento dello scopo concreto.

Queste "unità" dell'attività umana ne compongono la sua macrostruttura. La peculiarità dell'analisi che porta alla loro individuazione, consiste nel fatto che essa non si serve dello smembramento dell'attività vivente in elementi, ma ne scopre i rapporti interni che la caratterizzano. [...] L'attività rappresenta un processo che viene caratterizzato da trasformazioni che si verificano costantemente. L'attività può perdere il motivo che la chiama in vita e si trasforma allora in azione, che, forse, realizza un rapporto completamente diverso col mondo, un'altra attività; al contrario, un'azione può assumere una forza stimolante autonoma e divenire una particolare attività; infine, un'azione può trasformarsi in metodo per l'ottenimento di un fine, in un'operazione capace di realizzare azioni diverse.

[...]

L'individuazione di azioni e di operazioni nell'attività non esaurisce la sua analisi. Dietro l'attività e le immagini psichiche che la regolano, si apre il grandioso funzionamento fisiologico del cervello

(p. 87 - 97)

(A. N. Leont'ev, *Attività, coscienza, personalità*,
ediz. orig. Mosca, 1975,
traduz. ital. Firenze: Giunti Barbera, 1977)

[*] Bibler sottolinea il rapporto tra interiorizzazione ed esteriorizzazione nel modo seguente

Il processo di immersione delle relazioni sociali nella coscienza è un processo di trasformazione di modelli culturali, di fenomeni culturali preparati, nella cultura del pensiero, una cultura dinamica, che è fusa e condensata nel singolo individuo. Una cultura sviluppata oggettivamente trova una determinazione soggettiva nel linguaggio interiore (inner speech), cioè una determinazione in cui si manifesta come una forma di creatività (orientata al futuro) di modelli di cultura semplicemente possibili ma ancora non esistenti. La relazione si inverte e il linguaggio interiore deve essere considerato non tanto come un fenomeno di interiorizzazione ma come l'intenzione di esternalizzare il pensiero, come un embrione di una nuova cultura, non ancora oggettivamente posta, non ancora dispiegata negli aspetti sociali esterni della cultura, un embrione concentrato nel concetto. Le relazioni sociali non sono solo immerse nel linguaggio interiore: sono radicalmente trasformate; acquistano un nuovo senso (non ancora realizzato), una nuova orientazione verso l'attività esterna, verso la loro materializzazione oggettiva. Ma allora il linguaggio interiore (e le sue forme elementari di dialogo con se stessi) possono essere rappresentate come il dialogo di quei modelli storico-culturali di pensiero che sono interiorizzate nelle diverse voci del mio proprio Io e che portano alla creazione di nuovi fenomeni culturali (conoscenza, idee, opere d'arte) (1984)

[**] Davydov ritiene che la coincidenza delle strutture tra attività esterna ed interna rappresenti un problema aperto molto delicato dell'activity theory.

CAMPO VISIVO INTERNO

(Vygotskij)

[...] *I bambini risolvono i problemi pratici con l'aiuto sia del linguaggio, sia degli occhi e delle mani.* Questa unità di percezione, linguaggio e azione, che alla fine produce l'interiorizzazione del campo visivo, costituisce il tema centrale per qualsiasi analisi dell'origine di forme di comportamento unicamente umane.

Che cos'è che realmente distingue le azioni di una scimmia quando si tratta di risolvere problemi pratici?

La prima cosa che colpisce lo sperimentatore è la *libertà* incomparabilmente maggiore delle operazioni dei bambini, la loro maggiore indipendenza dalla struttura della concreta situazione visiva. I bambini, con l'aiuto del linguaggio, creano un maggior numero di possibilità di quante ne possano creare le scimmie attraverso l'azione. Una manifestazione importante di questa maggiore flessibilità è che il bambino è in grado di non considerare la linea diretta tra attore e scopo. Invece egli si impegna in molti atti preliminari, adoperando quelli che noi definiamo metodi strumentali o mediati (indiretti). Nel processo della soluzione di un compito, il bambino è capace di includere stimoli che non giacciono entro l'immediato campo visivo. Usando le parole (una classe di tali stimoli) per creare un programma specifico, il bambino raggiunge un raggio di attività molto più ampio e usa come strumenti oggetti che sono a portata di mano *ma cerca e prepara tali stimoli in modo che possano essere utili per la soluzione del compito e per pianificare azioni future*.

La seconda cosa è che le operazioni pratiche di un bambino che sa parlare diventano molto meno impulsive e spontanee di quelle della scimmia. È tipico della scimmia fare una serie di tentativi non controllati per risolvere il problema dato. Al contrario, il bambino che usa il linguaggio divide l'attività in due parti consecutive. Egli pianifica come risolvere il problema per mezzo del linguaggio e poi mette in pratica la soluzione preparata mediante un'attività esplicita. La manipolazione diretta è costituita da un processo psichico complesso attraverso il quale le motivazioni e le intuizioni interne ritardate nel tempo stimolano il proprio sviluppo e la propria realizzazione. Questo nuovo tipo di struttura psichica è assente nelle scimmie perfino in forme rudimentali.

Infine è decisamente importante che il linguaggio non solo faciliti l'effettiva manipolazione degli oggetti al bambino, ma anche controlli *il suo comportamento stesso*. Quindi con l'aiuto del linguaggio, i bambini, diversamente dalle scimmie, acquisiscono la capacità di essere sia i soggetti che gli oggetti del loro proprio comportamento.

[...]

Diversamente dalla scimmia, della quale Köhler ci dice che è 'la schiava del suo proprio campo visivo', i bambini acquisiscono un'indipendenza nei confronti di ciò che concretamente li circonda; essi cessano di agire nello *spazio* che è per essi un dato immediato ed evidente. Quando i bambini imparano a usare in modo efficace la funzione programmatrice del loro linguaggio, il loro campo cognitivo cambia radicalmente. Una visione del futuro è ora una parte integrante del loro modo di accostarsi a ciò che li circonda.

(p. 45-49)

(L.S. Vygotskij, *Strumento e simbolo nello sviluppo del bambino*,
in *Il processo cognitivo*,
Boringhieri, 1987)

CONCETTI QUOTIDIANI E CONCETTI SCIENTIFICI

(Vygotskij)

Lo sviluppo di un concetto scientifico relativo alla vita sociale si verifica nelle condizioni di un processo d'istruzione, che rappresenta una forma specifica di collaborazione sistematica tra il pedagogo e il bambino, collaborazione durante la quale maturano le funzioni psichiche superiori del bambino con l'aiuto e la partecipazione dell'adulto. [...] Questa collaborazione specifica tra il bambino e l'adulto, che è l'elemento centrale nel processo educativo, insieme con il fatto che le conoscenze sono date al bambino in un sistema ordinato, spiega la maturazione precoce dei concetti scientifici e mostra che il livello del loro sviluppo rappresenta come una zona di possibilità prossime in relazione ai concetti quotidiani, aprendo loro la via, come una specie di propedeutica del loro sviluppo.

(p. 203)

[...]

Per chiarezza potremmo rappresentare schematicamente lo sviluppo dei concetti spontanei e scientifici del bambino secondo due linee di direzione opposta, di cui una va dall'alto in basso, raggiungendo ad un certo livello il punto in cui si accosta all'altra, che va dal basso in alto. Se si indicano convenzionalmente le proprietà del concetto che maturano prima - che sono più semplici, più elementari - come inferiori, e le proprietà del concetto che si sviluppano dopo - che sono più complesse, in quanto legate alla presa di coscienza e alla volontarietà - come superiori, allora si potrebbe dire convenzionalmente che i concetti spontanei del bambino si sviluppano dal basso verso l'alto, dalle proprietà più elementari e inferiori a quelle superiori, mentre i concetti scientifici si sviluppano dall'alto verso il basso, dalle proprietà più complesse e superiori a quelle più elementari e inferiori. [...] La prima comparsa di un concetto spontaneo è di solito legata ad uno scontro diretto del bambino con questa o quella cosa, con cose che, in verità, gli sono spiegate nello stesso tempo da parte degli adulti, ma che nondimeno sono cose reali, vive. Solo dopo un lungo sviluppo il bambino arriva alla presa di coscienza dell'oggetto, alla presa di coscienza del concetto stesso e alle operazioni astratte con essi. La nascita del concetto scientifico, al contrario, comincia non con l'urto diretto con le cose, ma attraverso la relazione mediata con l'oggetto [vedi # MEDIAZIONE SEMIOTICA]. Se là il bambino passa dalla cosa al concetto, qui è costretto spesso a percorrere la strada inversa: dal concetto alla cosa. [...] Se lo sviluppo dei concetti scientifici e lo sviluppo dei concetti quotidiani percorrono vie opposte, entrambi questi processi sono tuttavia legati l'uno all'altro interamente e molto profondamente. Lo sviluppo del concetto quotidiano del bambino deve raggiungere un certo livello affinché il bambino possa assimilare in generale un concetto scientifico e prenderne coscienza. Il bambino deve arrivare nei suoi concetti spontanei alla soglia al di là della quale diventa possibile la presa di coscienza. Così i concetti storici del bambino cominciano il proprio sviluppo solo quando il suo concetto quotidiano di passato è sufficientemente differenziato, quando la sua vita e la vita dei suoi parenti e delle persone che gli sono vicine si sono inserite nella sua coscienza nei limiti della primaria generalizzazione "prima ed ora". Ma, d'altro canto, come mostrano le esperienze sopra riferite, anche il concetto quotidiano dipende nel suo sviluppo dal concetto scientifico. Se è vero che il concetto scientifico ha effettuato la parte di sviluppo che devono ancora percorrere i concetti quotidiani del bambino, se cioè ha reso possibile per la prima volta nel bambino una serie di operazioni che risultano ancora molto lontane dall'essere possibili con un concetto come quello di "fratello" [si fa riferimento ai problemi piagetiani sul "fratello di un fratello"], ciò significa che il

fatto che il concetto scientifico del bambino abbia percorso questo cammino non può essere indifferente per la parte rimanente del cammino che i concetti quotidiani devono ancora compiere. Il concetto quotidiano, che ha percorso una lunga storia del suo cammino dal basso in alto, ha aperto la strada alla germinazione ulteriore del concetto scientifico verso il basso, poiché ha creato una serie di strutture necessarie per la comparsa delle proprietà inferiori ed elementari del concetto. Così anche il concetto scientifico, che ha percorso una parte del cammino dall'alto verso il basso, ha aperto la strada per lo sviluppo dei concetti quotidiani, preparando una serie di formazioni strutturali necessarie per padroneggiare le proprietà superiori del concetto. I concetti scientifici germinano verso il basso mediante quelli quotidiani. I concetti quotidiani germinano verso l'alto mediante quelli scientifici.

(p. 286-8)

[nelle pagine 304 e ss. viene esaminato anche il rapporto tra concetti aritmetici e concetti algebrici nel bambino e nell'adolescente].

(L. S. Vygotskij, *Pensiero e linguaggio*,
ed. orig. Mosca, 1934
trad. critica ital. a cura di L. Mecacci, 1992, Bari: Laterza).

CONOSCENZA EMPIRICA - CONOSCENZA TEORICA

(Davydov)

[...] L'astrazione, la generalizzazione e il concetto di cui dispone il pensiero teorico sono, per loro contenuto e forma, diversi dal pensiero empirico. Questa differenza scaturisce innanzitutto dagli obiettivi diversi che questi tipi di pensiero perseguono. A carico del pensiero empirico si assolve principalmente la funzione di una catalogazione di fondo, di una classificazione di oggetti e fenomeni. In questo, si risolve in sostanza il problema della catalogazione e classificazione unilaterali di oggetti e fenomeni. Il pensiero teorico - scientifico persegue lo scopo della riproduzione dell'essenza evoluta dell'oggetto. Daremo un breve *riassunto* delle differenze fondamentali tra "conoscenza empirica" e "conoscenza teorica" (con il termine "conoscenza" si denotano in forma abbreviata l'astrazione, la generalizzazione e il concetto nella loro unità).

1) La conoscenza empirica viene elaborata nel confronto tra oggetti e rappresentazioni di essi, che permette di individuare negli stessi proprietà uguali, generali. La conoscenza teorica nasce sulla base dell'*analisi* del ruolo e della funzione di un certo rapporto delle cose all'interno di un sistema articolato.

2) Il confronto evidenzia la proprietà *formalmente* generale, la cui conoscenza permette di rapportare singoli oggetti ad una determinata classe formale, indipendentemente dall'essere questi oggetti connessi tra loro. Attraverso l'*analisi* si trova quel *reale* e particolare rapporto delle cose che funge - al tempo stesso - da fondamento genetico di tutte le altre manifestazioni del sistema; questo rapporto si presenta come forma universale o essenza dell'intero mentalmente riproducibile.

3) La conoscenza empirica, alla cui base sta l'*osservazione*, riflette solo le proprietà *esterne* degli oggetti e per questo si basa completamente su rappresentazioni visive. La conoscenza teorica, che nasce sulla base della *trasformazione* degli oggetti, riflette i loro nessi e relazioni interne. Nella riproduzione dell'oggetto in forma di conoscenza teorica, il pensiero *va oltre* i limiti delle rappresentazioni sensoriali.

4) La proprietà formale generale si delinea come allineata alle proprietà particolari degli oggetti. Nella conoscenza teorica, invece, si fissa il *nesso* del rapporto reale generale con le sue diverse manifestazioni, il *nesso* del generale col particolare.

5) La concretezza della conoscenza empirica consiste nella selezione delle illustrazioni, degli esempi che entrano nelle corrispondenti classi *formalmente* individuate. La concretizzazione della conoscenza teorica richiede la trasformazione di essa in una teoria evoluta, attraverso la *deduzione* e la esplicazione delle manifestazioni particolari del sistema del suo fondamento universale.

6) Mezzo necessario di fissazione della conoscenza empirica è la *parola* - termine. La conoscenza teorica si esprime innanzitutto nei *metodi* dell'attività intellettuale e poi nei diversi sistemi simbolico - segnici, in particolare con gli strumenti della lingua artificiale e naturale (il concetto teorico può già esistere come procedimento di deduzione del singolo, dall'universale, ma non ha ancora una formulazione terminologica).

(V. V. Davydov, Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento,
ed. orig. Mosca 1972,

trad. ital. Firenze: Giunti Barbera, 1979)

COSCIENZA

(Vygotskij)

Il ragno compie operazioni che assomigliano a quelle del tessitore, l'ape fa vergognare molti architetti con la costruzione delle sue cellette di cera. Ma ciò che fin da principio distingue il peggiore architetto dall'ape migliore è il fatto che egli ha costruito la celletta nella sua testa prima di costruirla in cera. Alla fine del processo lavorativo emerge un risultato che era già presente al suo inizio nell'*idea del lavoratore*, che quindi era già presente *idealmente*. Non che egli *effettui* soltanto un cambiamento di forma dell'elemento naturale; egli realizza nell'elemento naturale, *allo stesso tempo, il proprio scopo*, da lui ben conosciuto, che determina come legge il modo del suo operare, e al quale deve subordinare la sua volontà.

(K. Marx, *Il capitale*).

[...]

Tutto il comportamento dell'animale nelle sue forme principali è formato da due gruppi di reazioni: i riflessi innati o incondizionati e le reazioni acquisite o condizionate. Le reazioni innate costituiscono una specie di estratto biologico dell'esperienza collettiva ereditaria di tutta la specie, mentre le reazioni acquisite sorgono sulla base di questa esperienza ereditaria attraverso il circuito di nuove connessioni, date dall'esperienza personale dell'individuo. Sicché tutto il comportamento dell'animale si può convenzionalmente indicare come esperienza ereditaria più esperienza ereditaria moltiplicata per l'esperienza personale. La provenienza dell'esperienza ereditaria è stata chiarita in linea di massima da Darwin: il meccanismo di moltiplicazione di questa esperienza per l'esperienza personale è il meccanismo del riflesso condizionato stabilito dall'accademico Pavlov.

Con questa formula, in generale, si esaurisce il comportamento dell'animale.

Le cose stanno diversamente per quanto riguarda l'uomo. Qui per abbracciare con una certa completezza tutto il comportamento, occorre introdurre nuovi elementi nella formula. Qui occorre anzitutto osservare l'esperienza ereditaria, estremamente ampia, dell'uomo rispetto a quella dell'animale. L'uomo non si avvale soltanto dell'esperienza fisicamente ereditaria. Ma tutta la nostra vita, il lavoro, il comportamento sono fondati sulla larghissima utilizzazione dell'esperienza delle generazioni precedenti, non trasmessa attraverso la nascita, di padre in figlio. La indicheremo convenzionalmente come esperienza storica.

Accanto ad essa si deve porre l'esperienza sociale, l'esperienza degli altri uomini, che entra nel comportamento dell'uomo come componente molto importante. Io non dispongo soltanto delle connessioni formatesi nella mia esperienza personale tra i riflessi incondizionati e singoli elementi dell'ambiente, ma anche di un gran numero di connessioni che sono state fissate nell'esperienza degli altri uomini. Se io conosco il Sahara e Marte, pur non essendo mai uscito dal mio paese e non avendo mai guardato in un telescopio è evidente che questa mia esperienza deve la sua origine all'esperienza di altri uomini che sono andati nel Sahara e che hanno guardato nel telescopio. È altrettanto evidente che di solito gli animali non hanno questa esperienza. Chiamiamola componente sociale del nostro comportamento.

Infine, ciò che vi è di sostanzialmente nuovo nel comportamento dell'uomo è il fatto che il suo adattamento e il comportamento ad esso collegato assumono forme nuove rispetto a quelle degli

animali. Là vi è un adattamento passivo all'ambiente, qui un adattamento attivo dell'ambiente a se stessi.

[...]

Il ragno che tesse la tela e l'ape che costruisce cellette di cera fanno queste cose per un istinto ereditario, meccanicamente, sempre nello stesso modo e non manifestano in ciò maggiore attività che in tutte le altre reazioni di adattamento. Ben diversamente si comportano il tessitore e l'architetto. Come dice Marx, essi hanno prima costruito la loro opera nella propria testa, il risultato ottenuto nel processo di lavoro esisteva già idealmente prima che il lavoro incominciasse. Questa indiscutibile spiegazione di Marx non significa altro se non che per il lavoro umano è indispensabile una *duplicazione dell'esperienza*. Il lavoro ripete nei movimenti delle mani e nelle trasformazioni del materiale ciò che prima è stato fatto nella rappresentazione del lavoratore, quasi con i modelli di questi stessi movimenti e di questo stesso materiale. Ecco, questa *esperienza duplicata* che permette all'uomo di sviluppare forme di adattamento attivo, manca all'animale. Chiameremmo convenzionalmente questo nuovo tipo di comportamento *esperienza duplicata*.

Ora la parte nuova della formula del comportamento umano assume la forma *esperienza storica, esperienza sociale, esperienza duplicata*.

[...]

Abbiamo conoscenza di noi stessi perché abbiamo coscienza degli altri, e nello stesso modo in cui abbiamo coscienza degli altri, poiché nei confronti di noi stessi noi siamo quello che gli altri sono nei nostri confronti. Io ho coscienza di me soltanto nella misura in cui posso nuovamente percepire i miei riflessi come nuovi stimoli. Tra la mia possibilità di ripetere a voce alta una parola pronunciata tra me, e la possibilità di ripetere una parola detta da un altro, in sostanza non c'è nessuna differenza, così come non c'è differenza di principio in questi meccanismi: l'uno e l'altro sono un riflesso convertibile, un eccitatore.

perciò una conseguenza dell'accettazione dell'ipotesi proposta sarà la sociologizzazione, che ne deriva immediatamente, di tutta la coscienza, l'ammissione che al momento sociale della coscienza spetta il primato di tempo e di fatto. L'elemento individuale si costruisce come elemento derivato e secondario, sulla base dell'elemento sociale e secondo il suo esatto modello.

[...]

L'esperienza storica e quella sociale, evidentemente, non costituiscono qualcosa di psicologicamente diverso, perché nell'esperienza non possono essere divise e si presentano sempre insieme.

(pp 66 e ss.)

(L. S. Vygotskij, *La coscienza come problema della psicologia del comportamento*, ediz. russa 1925

in Vygotskij, *antologia di scritti* a cura di L. Mecacci, Il Mulino, 1983)

CULTURA

(scuola di Tartu - Estonia, ispirata a Bachtin).

La cultura non è un deposito di idee e di testi già pronti, ma il meccanismo vivo della coscienza collettiva.

(p. 5)

(J. M. Lotman, Prefazione,
in S. Salvestroni (a cura di)
Testo e contesto.
1980, Bari: Laterza)

La cultura nel senso più ampio del termine può essere considerata come memoria non ereditaria di una collettività che prende forma tramite un determinato sistema di divieti e di prescrizioni. Questa concezione di cultura tuttavia non esclude una concezione assiologica di essa: infatti per la collettività la cultura appare sempre come un certo sistema di valori. La differenza fra queste due interpretazioni della cultura può essere rapportata alla differenza che intercorre fra il punto di vista esterno di un'osservazione fatta da un estraneo e il punto di vista interno del portatore della cultura: l'approccio assiologico presuppone necessariamente che si tenga conto del punto di vista interno, cioè dell'autocoscienza della cultura. Gli studiosi della cultura anche in questo caso si mettono dal punto di vista distaccato di un osservatore esterno, dal momento che, per loro, oggetto di studio è la posizione da cui muove l'osservazione fatta dall'interno. Sotto questo rispetto la storia della cultura non è soltanto la dinamica di questi o di altri divieti e prescrizioni, ma è anche la dinamica dell'autocoscienza della cultura che dà una qualche spiegazione del relativo cambiamento che subiscono gli orientamenti normativi (ovvero le prescrizioni e i divieti).

(p. 243)

J. M. Lotman & B. A. Uspenskij.
Il ruolo dei modelli duali nella dinamica della cultura russa.
in S. A. D'Arco (a cura di). La cultura nella tradizione russa
del XIX e XX secolo. 1980.
Torino: Einaudi)

GENERE DI DISCORSO

(Bachtin)

Tutti i molteplici campi dell'attività umana sono legati all'uso del linguaggio. È ovvio che il carattere e le forme di questo uso sono molteplici quanto i campi dell'attività umana, il che, naturalmente, non è affatto in contraddizione con l'unità nazionale di una lingua. L'uso del linguaggio si effettua sotto forma di singole enunciazioni concrete (orali e scritte) dei partecipanti di un determinato campo d'attività umana. Queste enunciazioni riflettono le specifiche condizioni e finalità di ognuno di questi campi non soltanto col loro contenuto (tematico) e col loro stile linguistico, cioè con la selezione dei mezzi lessicali, fraseologici e grammaticali del linguaggio, ma, prima di tutto, con la loro struttura compositiva. Tutti questi tre momenti - contenuto tematico, stile e struttura compositiva - sono indissolubilmente legati nella *totalità* dell'enunciazione e sono del pari determinati dalla specificità della data sfera di comunicazione. Ogni singola enunciazione è, naturalmente, individuale, ma ogni sfera d'uso del linguaggio elabora propri *tipi relativamente stabili* di enunciazioni, tipi che chiameremo *generi del discorso*

(p. 245.

Bachtin M., *L'autore e l'eroe*,
Torino: Einaudi, 1988).

Un genere di discorso non è una forma di linguaggio, ma una forma tipica di enunciazione: come tale il genere include in sé un certo modo tipico di espressione ad esso inerente. Nel genere la parola acquista una particolare espressione tipica. I generi corrispondono a situazioni tipiche di comunicazione discorsiva, a temi tipici, e, di conseguenza, anche a contatti particolari tra i *significati* delle parole e la concreta realtà attuale sotto certe circostanze tipiche.

(Bachtin, citato in Wertsch, *Voices of the Mind*,
p. 61, Harvester Wheatsheaf

[nello stesso volume Wertsch analizza il genere di discorso dell'istituzione scolastica, p. 110 ss.]).

INTERIORIZZAZIONE

(Vygotskij)

Consideriamo la storia dello sviluppo del gesto dell'indicazione, che, come vedremo nel seguito, ha una parte estremamente importante nello sviluppo del linguaggio infantile e che, più generalmente, costituisce, in misura significativa, l'antico fondamento di tutte le forme superiori di comportamento. Indagando la sua storia, noteremo che il gesto dell'indicazione rappresenta originariamente un semplice movimento incompiuto volto ad afferrare l'oggetto, e che sta ad indicare appunto l'azione. Il bambino tenta di afferrare un oggetto che è collocato troppo lontano, le sue mani sono protese verso l'oggetto, e restano sospese nell'aria, le dita compiono movimenti di presa, tale situazione è punto di partenza per ogni successivo sviluppo. Qui sorge innanzitutto il movimento dell'indicazione, che siamo in diritto di definire convenzionalmente gesto indicativo in se stesso. Dunque c'è un movimento del bambino che indica obiettivamente l'oggetto e soltanto questo.

Quando la madre giunge in aiuto del bambino e concettualizza il suo movimento come un'indicazione, la situazione muta radicalmente. Il gesto dell'indicazione diventa un gesto per gli altri. In risposta al movimento di prensione incompiuto da parte del bambino si ha una reazione non da parte dell'oggetto, ma da parte di un'altra persona. Il significato originario a questo fallito movimento di prensione viene in tal modo attribuito dagli altri. E soltanto successivamente, in seguito al fatto che un tale movimento di prensione fallito viene ricollegato dal bambino con tutta la situazione oggettiva, il bambino stesso comincia a considerare questo stesso movimento come un'indicazione. Avviene così una modificazione della funzione del movimento stesso: da movimento rivolto verso l'oggetto diventa movimento rivolto verso un'altra persona attraverso un mezzo di comunicazione, la prensione si trasforma in indicazione. In virtù di ciò lo stesso movimento si riduce, si contrae, e si elabora così quella forma del gesto dell'indicazione, di fronte alla quale abbiamo il diritto di affermare che si tratta di un gesto per se stessi. Tuttavia un tale movimento diviene un gesto per se stessi solo a partire da un'iniziale indicazione in sé, e cioè disponendo oggettivamente di tutte le funzioni indispensabili dell'indicazione e del gesto per gli altri, ovvero venendo concettualizzato e compreso dalle persone circostanti come un'indicazione. Cosicché il bambino giunge per ultimo alla consapevolezza del proprio gesto. Il suo significato e la sua funzione gli vengono dati inizialmente dalla situazione oggettiva, poi dalle persone che circondano il bambino. In tal modo il gesto indicativo comincia dapprima ad indicare, col movimento, ciò che viene compreso dagli altri, e solo più tardi diventa indicazione per lo stesso bambino.

Cosicché potremmo dire che diventiamo noi stessi attraverso gli altri, e che tale regola si riferisce non solo alla personalità nel suo complesso, ma anche alla storia di ogni singola funzione

[...]

Ogni funzione psichica superiore è stata esterna perché è stata sociale prima ancora che interiore e psichica, è stata cioè originariamente un rapporto sociale tra due persone. Il mezzo per esercitare un'azione su se stessi è inizialmente un mezzo per esercitare un'azione sugli altri, o un mezzo che gli altri adoperano per esercitare un'azione sulla persona singola.

Nel bambino possono essere osservate queste tre principali forme dello sviluppo nel loro avvicinarsi nelle funzioni del linguaggio. La parola deve innanzitutto avere un significato, cioè riferirsi ad una cosa, costituire cioè un legame oggettivo tra la parola stessa e la cosa che indica. Se non c'è quest'ultimo, ogni ulteriore sviluppo della parola è impossibile. Successivamente questo

legame oggettivo tra parola e cosa deve essere adoperato funzionalmente dall'adulto come mezzo per la comunicazione con il bambino. Soltanto in seguito a ciò la parola assume un significato per lo stesso bambino. Cosicché il significato della parola dapprima esiste oggettivamente per gli altri, e soltanto in seguito comincia ad esistere per il bambino stesso. Tutte le principali forme della comunicazione verbale dell'adulto con il bambino divengono successivamente funzioni psichiche. Potremmo formulare come segue la legge genetica generale dello sviluppo culturale: ogni funzione nel corso dello sviluppo culturale del bambino fa la sua apparizione due volte, su due piani diversi, prima su quello sociale, poi su quello psicologico, dapprima tra le persone come categoria interspichica e poi all'interno del bambino come categoria intrapsichica. Ciò vale ugualmente sia per l'attenzione volontaria che per la memoria logica, che per la formazione dei concetti e lo sviluppo della volontà. Siamo nel pieno diritto di considerare questa assunzione come una vera e propria legge, ma s'intende che il passaggio dall'esterno all'interno trasforma il processo stesso, ne muta la struttura e le funzioni. Dietro a tutte le funzioni superiori e ai loro rapporti stanno geneticamente delle relazioni sociali, relazioni reali tra uomini. Ne segue che uno dei principi fondamentali della nostra volontà è la divisione delle funzioni tra gli uomini, una nuova suddivisione binaria di ciò che ora è fuso insieme, il dispiegarsi, sperimentale, del processo psichico superiore nel dramma che ha luogo tra gli uomini.

(L. S. Vygotskij, Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori,
ediz. orig. Mosca 1930 - 60
traduz. ital. Firenze: Giunti, 1974, p. 199 e ss.)

MATEMATIZZATO - MATEMATICA

(Raymond)

La matematica, a prima vista, non sembra una scienza, perché, a meno che non si ammettano oggetti ideali, cioè una realtà spirituale, essa non sembra far conoscere teoricamente nulla di reale. Non che essa non riguardi, in definitiva, questo o quel settore della realtà, ma lo fa sempre attraverso la mediazione di un'altra scienza che la utilizza: la matematica non sembra toccare sperimentalmente, cioè direttamente ed esattamente, nessuna realtà che contribuisca a "rendere veri" i suoi teoremi. L'idealismo ha spesso suddiviso la realtà in settori: quello naturale inerte (fisica), quello naturale vivente (biologia) e quello sociale (scienze sociali); non resterebbe quindi nulla alla matematica. Nulla di *naturale sensibile* (figure e numeri non sono che *simboli*), risponde il materialista.

Le tesi che seguono mirano dunque a restituire alla matematica il titolo di scienza.

L'unico modo di farne una scienza è quello di spezzare il testo matematico, qualunque esso sia, in due livelli, uno dei quali ha il ruolo di teoria e l'altro quello di realtà, l'uno matematico e l'altro matematizzato. Questi due livelli non sono fissati una volta per tutte: essi non sono che *funzioni*. In particolare, quello matematizzato è sempre già teorico, e perciò variabile, a differenza dei dati naturali o anche sociali, riprodotti in modo identico su periodi lunghi. Questo livello può essere quello del simbolico costituito all'esterno, del teorizzato costituito all'esterno, oppure del teorizzato costituito all'interno di un settore matematico, ma non integrato negli altri. Quello matematico può essere un livello teorico superiore in matematica, o un livello teorico proposto ad un confronto con un altro livello assunto come oggetto.

La teoria in genere è, ovviamente, variabile da un periodo storico all'altro, o meglio, essa si riproduce grossolanamente allargandosi.

Ma il dato teorico ha uno statuto molto più specifico. Da un lato, esso dipende dal linguaggio stesso, anzi da alcune sue forme che bisogna precisare storicamente, e cioè *in modo variabile*; bisogna indicare non solo le forme simboliche che in un dato momento storico sono considerate matematizzate, ma anche *il lassismo o il rigore della simbolizzazione*. D'altro lato, questa stessa realtà simbolica ha sempre, in definitiva, *usi extramatematici* (e non solo all'interno di altre scienze), che le garantiscono di non essere solo un semplice simbolismo. E' la mediazione di altre scienze (in modo particolare) che permette alla matematica di avere una presa pratica sul mondo: è stata prima la mancanza di altre scienze che ha fatto sorgere la finzione delle essenze, e poi l'esistenza di mediazioni che ha dato alla matematica l'apparenza di una non - scienza.

[...]

La distinzione tra livello matematico e livello matematizzato, tra teoria e dati (già teorici o comunque simbolici) è anche l'opportunità per un lavoro storico nuovo. Infatti, il livello matematizzato non è definito a priori come terreno di esercizio di quello matematico, o meglio, non ogni simbolico è matematizzato a priori.

I limiti, del resto, non sono sempre netti e subiscono degli slittamenti nel corso della storia, così, il problema dell'*ingresso del matematizzato all'interno del campo matematico* è eminentemente storico, poiché questo ingresso dipende contemporaneamente dall'evoluzione di ognuno di questi livelli (accesso del simbolico al livello matematizzato, del livello matematizzato esterno al campo matematico, del livello matematizzato interno già teorico ad un teorico nuovo).

La numerazione, le operazioni elementari, il tracciato delle figure, non sono immediatamente aritmetica e geometria.

[...]

Il matematizzato che accede alla matematica non è quindi un dato empirico come un altro: nella misura in cui esso è puramente simbolico, esso è modificato dalla sua concettualizzazione, trasformato dall'evoluzione stessa della teoria.

(p. 28 - 42)

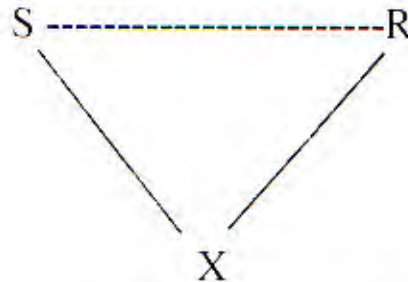
(P. Raymond, La storia e le scienze,
ed. orig. francese 1975
traduz. ital. Roma: Editori Riuniti, 1979)

MEDIAZIONE SEMIOTICA

(Vygotskij)

Struttura delle operazioni con i segni.

Ogni forma elementare di comportamento presuppone una reazione *diretta* al compito proposto all'organismo (che può essere espresso dalla semplice formula $S \rightarrow R$). Ma la struttura delle operazioni con i segni necessita di un legame intermedio tra stimolo e risposta. Questo legame intermedio è uno stimolo (segno) di secondo grado che è trascinato nell'operazione ove adempie ad una speciale funzione: crea un nuovo rapporto tra S e R. Il termine "trascinare nel " indica che un individuo deve essere impegnato attivamente nello stabilire tale legame. Questo segno possiede inoltre l'importante caratteristica dell'azione inversa (cioè opera sull'individuo, non sull'ambiente). Di conseguenza, il semplice processo di stimolo - risposta è rimpiazzato da un'azione complessa e mediata che noi raffiguriamo nel modo riprodotto nella figura 1. In questo nuovo processo l'impulso diretto di reagire è inibito e si inserisce uno stimolo ausiliario che facilita il completamento dell'operazione con mezzi indiretti.



Studi accurati dimostrano che questo tipo di organizzazione è fondamentale per tutti i più alti processi psichici, anche se in forme molto più sofisticate di quelle illustrate sopra. Il legame intermedio in questa formula non è solo un metodo per migliorare l'operazione preesistente e non è neppure un legame addizionale in una catena S - R. Siccome questo stimolo ausiliario possiede la funzione specifica dell'azione contraria, esso trasferisce l'operazione mentale a forme più alte e qualitativamente nuove e permette agli esseri umani, per mezzo di stimoli estrinseci, di controllare il loro comportamento dal di fuori. L'uso di segni porta gli esseri umani a una struttura specifica del comportamento che si distacca dallo sviluppo biologico e che crea forme nuove di un processo psichico culturalmente fondato.

(L. S. Vygotskij, Il processo cognitivo,
ediz. orig. Mosca, 1930 - 60
tr. ital. Torino: Boringhieri, 1987, p. 64 e ss.)

MICRO-SPAZIO - MESO-SPAZIO - MACRO-SPAZIO

(Galvez)

MICRO-SPAZIO	MESO-SPAZIO	MACRO-SPAZIO
vicino al soggetto accessibile alla manipolazione e alla visione	accessibile a una visione globale, quasi simultanea	accessibile solo a visioni locali la visione globale è costruita in modo intellettuale
tutti gli spostamenti di soggetto e oggetto sono possibili. c'è una percezione esaustiva dell'oggetto	gli oggetti, fissi, fungono da punti di riferimento, percepibili solo sotto certe prospettive, gli spostamenti del soggetto sono limitati dalla disposizione degli oggetti. lo spazio è differenziato in funzione di pieni e vuoti	gli oggetti sono fissi e fungono da punti di riferimento. ma solo una parte è sotto il controllo della vista
forte densità di informazione per il soggetto: controllo empirico delle relazioni spaziali; nessun bisogno di concettualizzazione (1)	in relazione al micro-spazio, minore densità di informazione e costo più alto dell'azione; un certo livello di concettualizzazione è necessario per integrare e coordinare prospettive diverse	tre tipi di macro-spazio corrispondono a densità di informazione decrescenti: urbano rurale marittimo (2): la concettualizzazione è indispensabile per ricostruire la continuità dello spazio e ottenere una rappresentazione globale
il soggetto è fuori dallo spazio centrato nella sua prospettiva	il soggetto è dentro lo spazio e ha bisogno di decentrazione	il soggetto è dentro lo spazio e ha bisogno di decentrazione per integrare e coordinare percezioni frammentarie

(segue)

MICRO-SPAZIO	MESO-SPAZIO	MACRO-SPAZIO
<p>lo spazio è generato intorno all'oggetto; proprietà spaziali sono attribuite all'oggetto: lunghezza, tridimensionalità, non c'è bisogno di un sistema di riferimento (1)</p>	<p>lo spazio è un contenitore omogeneo (3) di oggetti; proprietà dello spazio vuoto: estensione, tridimensionalità, non isotropia (4); necessità di coordinare sotto il controllo continuo della vista il sistema di riferimento del soggetto con un sistema di riferimento fisso</p>	<p>lo spazio è un contenitore generato intellettualmente; proprietà dello spazio: estensione, tridimensionalità, isotropia (4); per orientarsi, necessità di coordinare il sistema di riferimento del soggetto con uno (o più) riferimenti diversi, esterni e fissi.</p>

(Berthelot R. & Salin M.H.,
L'insegnement de l'espace et de la géométrie
dans la scolarité obligatoire, p. 104-5,
Thèse, Bordeaux: Université I, 1992)

Note di redazione:

- (1) il discorso è diverso, a nostro parere, quando si tratta di rappresentare il micro-spazio, ad esempio attraverso il disegno;
- (2) alcuni autori (es. Lanciano) introducono anche il **MEGA-SPAZIO** astronomico, necessario per lo studio delle costellazioni o del sole (ombre solari); esso ha caratteristiche ancora diverse poiché ha densità di informazione ancora minore e non è esplorabile (dagli allievi);
- (3) **omogeneo**: uno spazio si dice (intuitivamente) omogeneo quando tutti i suoi punti hanno le stesse proprietà; uno spazio centrato sul soggetto non è omogeneo;
- (4) **isotropo**: uno spazio si dice (intuitivamente) isotropo, quando tutte le sue direzioni hanno le stesse proprietà; lo spazio dell'esperienza non è omogeneo per la presenza della direzione verticale privilegiata.

OSTACOLO EPISTEMOLOGICO

(Bachelard)

E' in termini d'ostacolo che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare gli ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni, né d'incriminare la debolezza dei sensi e dello spirito umano: è nell'atto stesso di conoscere, intimamente, che appaiono, per una sorta di necessità funzionale, delle lungaggini e degli scompigli. E' là che noi mostreremo le cause di stagnazione e anche di regressione, è là che noi decelereremo delle cause d'inerzia, che noi chiameremo Ostacoli Epistemologici.

(G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, VRIN, 1975)

OSTACOLO DI ORIGINE ONTOGENETICA

Gli ostacoli di origine ontogenetica sono quelli che sopraggiungono con delle limitazioni (neurofisiologiche tra le altre) del soggetto nel momento del suo sviluppo: egli sviluppa delle conoscenze appropriate ai suoi mezzi e ai suoi scopi ad una data età.

OSTACOLO DI ORIGINE DIDATTICA

Gli ostacoli di origine didattica sono quelli che dipendono soltanto da una scelta o da un progetto del sistema educativo: in generale dalla trasposizione didattica.

OSTACOLO DIDATTICO DI ORIGINE EPISTEMOLOGICA

Gli ostacoli d'origine epistemologica sono quelli ai quali non si può, né si deve sfuggire, in quanto hanno un ruolo costitutivo nella conoscenza, si può ritrovarli nella storia dei concetti stessi.

Un ostacolo epistemologico è:

- * una conoscenza che funziona come tale su un insieme di situazioni e per certi valori delle variabili di queste situazioni;
- * una conoscenza che, tentando di adattarsi ad altre situazioni o ad altri valori delle variabili, provoca errori specifici, riconoscibili ed analizzabili;
- * una conoscenza stabile: nelle situazioni che escono dal suo dominio di validità, il suo rifiuto costa di più all'allievo di un tentativo di adattamento ad ogni costo, anche se questo appesantisce molto il processo di soluzione;
- * una conoscenza che può essere superata solo in situazioni specifiche di rifiuto e questo rifiuto porta alla costruzione del sapere: il ritorno alla concezione ostacolo è parte integrante del nuovo sapere.

(A. Duroux, *Le valeur absolue*, Petit x, n. 3, 1983)

(vedi anche M. Ferreri & F. Spagnolo, *L'apprendimento tra emozione ed ostacolo*, Quaderni di Ricerca Didattica, n. 4, Palermo: G.R.I.M., 1994)

SENSO PERSONALE - SIGNIFICATO

(Leont'ev)

Il significato è ciò che si rivela nell'oggetto o nel fenomeno oggettivamente, nel sistema dei legami e dei rapporti, delle interazioni oggettive. Il significato si riflette, viene fissato nel linguaggio ed assume grazie a ciò stabilità. In questa forma, nella forma di significato linguistico, esso costituisce il contenuto della coscienza sociale; entrando nel contenuto della coscienza sociale esso diventa anche "coscienza reale" degli individui, oggettivizzando in sé il senso soggettivo di ciò che è riflesso per loro.

La riflessione cosciente, perciò, è caratterizzata dall'esistenza di uno specifico rapporto interiore, il rapporto tra il senso soggettivo e il significato.

[]

Significato è quella generalizzazione della realtà che è stata cristallizzata, fissata, nel suo portatore sensibile, solitamente la parola o l'associazione di parole. E' la forma ideale, spirituale di cristallizzazione dell'esperienza sociale, della pratica sociale dell'umanità. L'insieme di idee di una data società, la scienza, il linguaggio esistono come sistemi dei corrispondenti significati. Così il significato appartiene innanzitutto al mondo dei fenomeni storici oggettivi. Ed è da ciò che bisogna partire.

Ma il significato esiste anche come fatto della coscienza individuale. L'uomo percepisce, pensa il mondo come un essere sociale e storico, egli è indirizzato e nello stesso tempo limitato dalle idee e dalle conoscenze della sua epoca, della propria società. La ricchezza della sua coscienza non si riduce affatto alla ricchezza della sua esperienza individuale. L'uomo conosce il mondo non come Robinson, che sull'isola deserta compie le sue scoperte da solo. L'uomo nel corso della sua vita assimila l'esperienza delle precedenti generazioni, e questo avviene proprio in forma di appropriazione dei significati e nella misura in cui si verifica questa appropriazione. Il significato perciò è la forma nella quale il singolo uomo si impadronisce dell'esperienza umana generalizzata e riflessa.

Il significato come fatto della coscienza individuale non perde comunque il suo contenuto oggettivo e non diventa un fatto puramente "psicologico". Naturalmente ciò che penso, comprendo e so del triangolo può anche non coincidere esattamente con il significato di "triangolo" accettato dalla geometria contemporanea. Ma questo non costituisce un'antitesi di principio. I significati non hanno altra esistenza che nei concreti cervelli umani; non c'è un regno autonomo dei significati del tipo del mondo platonico delle idee. Di conseguenza, non si può contrapporre al significato "geometrico", logico e in generale oggettivo quello esistente nella coscienza del singolo uomo quale particolare significato psicologico; la differenza qui non è tra logico e psicologico, ma piuttosto tra generale e singolo, individuale.

[]

Il principale problema psicologico sul significato è quello di scoprire quali siano realmente il ruolo e il posto del significato nella vita psichica dell'uomo, cosa essi sono nella sua vita.

Nel significato la realtà si svela all'uomo ma in una forma particolare. Il significato media [vedi # **MEDIAZIONE SEMIOTICA**] la riflessione del mondo da parte dell'uomo, poiché egli lo riconosce, cioè la riflessione del mondo da parte dell'uomo si fonda sull'esperienza pratica e sociale e la include in sé.

[...]

Psicologicamente, dunque, il significato è la riflessione generalizzata della realtà, divenuta patrimonio della mia coscienza (con una maggiore o minore completezza e poliedricità), elaborata dall'umanità e fissata in forma di concetti, di conoscenze o anche in forma di abilità in quanto "forma di azione" generalizzata, norma di comportamento, ecc.

Il significato è la riflessione della realtà indipendentemente dal rapporto personale, individuale, che l'uomo stabilisce con essa. L'uomo trova già pronto un sistema di significati formatosi storicamente e se ne impadronisce così come si impadronisce dello strumento, di questo prototipo materiale del significato. Il fatto propriamente psicologico, il fatto della mia vita, è se mi sono impadronito o non mi sono impadronito di un determinato significato, se l'ho assimilato o se non l'ho assimilato, e in quale misura l'ho assimilato e cosa diventa per me, per la mia personalità; quest'ultimo dipende da quale senso soggettivo, personale esso ha per me.

Il concetto di senso è stato studiato dalla psicologia borghese da punti di vista assai diversi [...].

Un altro modo di affrontare il problema è quello proprio della ricerca genetica e storica. È il modo di affrontare il problema che parte dall'analisi dei fenomeni che non appartengono alla conoscenza ma alla vita stessa, cioè dai fenomeni che caratterizzano la reale interazione tra il soggetto reale e il mondo che lo circonda, in tutta l'oggettività e l'indipendenza delle sue proprietà, legami e rapporti. Perciò anche il senso interviene, per la ricerca storica sulla coscienza, innanzitutto come rapporto che si crea nella vita, nell'attività del soggetto

[...]

Dal punto di vista psicologico concreto questo senso cosciente viene generato dal rapporto oggettivo, che trova riflesso nel cervello dell'uomo, tra ciò che lo stimola ad agire e ciò verso cui la sua azione è diretta, quale suo risultato immediato. In altre parole, il senso cosciente esprime il rapporto tra la motivazione e lo scopo. È necessario solo sottolineare in modo particolare che il termine "motivazione" [o motivo, vedi # ATTIVITA' - AZIONI - OPERAZIONI], viene da noi impiegato non per indicare l'emozione della necessità ma quell'obiettivo nel quale tale esigenza si concreta in quelle determinate condizioni e verso il quale è diretta l'attività, cioè che la stimola.

Ammettiamo che uno studente legga un'opera che gli è stata raccomandata. Si tratta di un processo cosciente, diretto ad uno scopo. Il suo scopo cosciente è quello di assimilare il contenuto di quell'opera. Quale senso personale, tuttavia, ha per lo studente questo scopo e di conseguenza anche l'azione che vi corrisponde? Dipende da qual è il motivo che stimola l'attività dello studente, realizzata con una certa azione. Se questo motivo consiste nel prepararsi alla futura professione, la lettura avrà per lui un certo senso. Se il motivo del suo impegno consiste, ad esempio, soltanto nel superare formalmente gli esami allora, naturalmente, il senso dello studio di quell'opera sarà per lui diverso ed egli leggerà quell'opera con altri occhi e l'assimilerà in modo diverso.

Pertanto, per sapere qual è il senso individuale dobbiamo scoprire la motivazione corrispondente.

Il senso è sempre il senso di qualche cosa. Non esistono sensi "puri". Perciò il senso, soggettivamente, appartiene in qualche modo allo stesso contenuto di ciò di cui si ha coscienza e sembra entrare a far parte del suo significato oggettivo. Questa circostanza ha dato luogo a quel grosso malinteso, nella psicologia e nella linguistica psicologizzante, che si è espresso nella completa mancanza di distinzione tra questi due concetti, oppure nel considerare il senso un significato concretizzato in dipendenza del contesto o della situazione. In effetti, sebbene il senso (il senso personale) e il significato, sulla base dell'introspezione, sembrano uniti nella coscienza, questi due concetti devono essere distinti tra loro. Essi sono implicitamente legati l'un l'altro ma solo nel rapporto inverso a quello indicato: è il senso che si esprime nei significati (come la motivazione negli scopi [vedi # ATTIVITA' - AZIONI - OPERAZIONI]) e non il significato nel senso.

[...]

Quando per caratterizzare psicologicamente la coscienza introduciamo la distinzione tra senso personale significato propriamente detto è necessario sottolineare che questa distinzione non si riferisce a tutto il contenuto riflesso ma soltanto a ciò verso cui è diretta l'attività del soggetto. Il senso personale esprime infatti proprio il suo atteggiamento verso i fenomeni oggettivi dei quali il soggetto prende coscienza

Ci siamo occupati nei dettagli del problema del significato e del senso perché il loro rapporto è il rapporto tra i principali "componenti" della struttura interna della coscienza umana; non ne deriva che, pur essendo i principali, essi siano gli unici. Pur semplificando e schematizzando questi complessi rapporti propri della coscienza sviluppata non possiamo tralasciare un altro suo "componente" e precisamente il suo contenuto sensorio.

[...]

Il mutamento e lo sviluppo del contenuto immediatamente sensorio della coscienza si verificano soltanto nel corso dello sviluppo delle forme di attività umane. Così nell'uomo lo sviluppo dell'udito fonemico si forma perché gli uomini impiegano un linguaggio sonoro; e gli occhi dell'uomo cominciano a vedere diversamente dal rozzo occhio non umano soltanto perché l'oggetto diventa per lui un oggetto *sociale*.

(A. N. Leont'ev, Problemi dello sviluppo psichico,
ediz. orig. Mosca, 1959
tr. ital. Roma: Editori Riuniti, 1976, p. 244 e ss.)

SIGNIFICATO - SENSO - RIFERIMENTO ALL'OGGETTO

(Vygotskij)

Le parole del bambino coincidono con le parole dell'adulto nel loro riferimento all'oggetto, cioè indicano gli stessi oggetti, si riferiscono allo stesso cerchio di fenomeni. Non coincidono però nel loro significato [*] Questa coincidenza nel riferimento all'oggetto e la non coincidenza nel significato della parola non sono l'eccezione ma la regola nello sviluppo della lingua. [...] Si può dire che [le parole] sono sinonimi nel senso che indicano lo stesso oggetto. Indicano le stesse cose, coincidono nella loro funzione denominativa, ma le operazioni mentali che vi sono alla base sono differenti. La modalità attraverso la quale il bambino e l'adulto arrivano a questa denominazione, l'operazione mediante cui pensano un dato oggetto e il significato della parola, equivalente di questa operazione, si verificano nei due casi in modi estremamente differenti.

(p. 176 - 7)

Il significato della parola, come abbiamo già cercato di spiegare sopra, rappresenta in sé tale unità globale non più scomponibile nei due processi, di cui non si può dire ciò che rappresenta: un fenomeno del linguaggio o un fenomeno del pensiero. Una parola priva di significato non è una parola. E' un suono vuoto, quindi il significato è un segno distintivo necessario, costitutivo della parola stessa. E' la parola stessa presa nel suo aspetto interno, così sembra che possiamo studiarla con sufficiente fondamento come un fenomeno del linguaggio. Ma il significato della parola dal punto di vista psicologico, come ci siamo frequentemente persuasi in tutto il corso della nostra ricerca, non è altro che una generalizzazione o un concetto. Generalizzazione e significato della parola sono sinonimi. Ogni generalizzazione, ogni formazione di un concetto è l'atto di pensiero più specifico, più originale, più sicuro. Di conseguenza consideriamo a ragione il significato della parola come un fenomeno del pensiero.

Così il significato della parola è allo stesso tempo un fenomeno verbale ed intellettuale, sebbene questo non significhi un'appartenenza puramente esteriore a due aree diverse della vita psichica. Il significato della parola è un fenomeno del pensiero nella misura in cui il pensiero è legato alla parola e incarnato nella parola e viceversa: è un fenomeno del linguaggio nella misura in cui il linguaggio è legato al pensiero ed è da esso illuminato. E' un fenomeno del pensiero verbale o della parola dotata di senso. E' un'unità globale di parola e pensiero.

(p. 325 - 326)

(L. S. Vygotskij, *Pensiero e linguaggio*, ed. orig. Mosca, 1934
trad. critica ital. a cura di L. Mecacci, 1992, Bari: Laterza).

Il senso di una parola [...] è l'aggregato di tutti i fatti psicologici emergenti nella nostra coscienza a causa di questa parola. Quindi, il senso di una parola sempre finisce con l'essere una formazione dinamica, fluente, complessa, che ha diverse zone di stabilità differenziale. [...] Come sappiamo, una parola cambia prontamente il suo senso in vari contesti. Al contrario, il suo significato è quell'elemento fisso e immutabile che rimane stabile nel corso di tutti i cambiamenti di senso nei diversi contesti. Questo cambiamento nel senso di una parola è un fatto fondamentale di cui tener conto nell'analisi semantica del linguaggio. Il significato reale di una parola non è costante. In una operazione una parola emerge con un significato e in un'altra essa assume un altro significato [**]

(L. S. Vygotskij, *Myshlenie i rech'*: Psikhologicheskie issledovaniya, citato da Wertsch)

[*] NB qui la parola significato non è usata nel senso di Leont'ev.

[**] NB in questo brano la parola significato sembra usata in due accezioni diverse: il significato fisso (cfr. Leont'ev), e il "significato reale" non costante che è anche chiamato senso. (cfr. # SENSO PERSONALE - SIGNIFICATO / # SIGNIFICATO - TEMA).

SIGNIFICATO - TEMA

(Bachtin)

Per *significato* [di un atto di parola], come distinto dal *tema*, intendiamo tutti quegli aspetti di un atto di parola che sono *riproducibili* e identici a se stessi in tutti i casi di ripetizione [...]. Il significato, in sostanza, non significa niente; possiede soltanto potenzialità - la possibilità di avere un significato in un tema concreto [...]. Diversamente dal significato, il tema - come l'enunciato di cui fa parte, è definito come unico, poiché nasce dall'incontro del significato con un contesto di enunciazione parimenti unico.

Chiamiamo il senso di un'intera espressione, di un intero atto di parola il suo *tema* [...]. Il tema stesso di un atto di parola è individuale e irriproducibile, proprio come lo è lo stesso atto di parola. Il tema è l'espressione della situazione storica, concreta, che ha generato l'atto di parola.

(p. 66)

(M. Bachtin, *Marxismo e filosofia del linguaggio*,
citato in T. Todorov, *Michail Bachtin: il principio dialogico*, 1990,
Torino, Einaudi)

La prima conseguenza importante del nuovo quadro [introdotto da Bachtin] è la necessità di distinguere radicalmente fra il significato nella lingua e il significato nel discorso o nella terminologia adottata in quell'epoca fra significato e tema. Questa distinzione in se stessa non è nuova; ma lo diventa in quanto il tema acquista una maggiore importanza. Infatti le dicotomie allora in uso fra significato abituale e significato occasionale, oppure fra significato fondamentale e significato marginale, o ancora fra denotazione e connotazione, hanno tutte il difetto di privilegiare il primo termine: in realtà il significato discorsivo, o tema, non ha nulla di marginale. Dunque il termine "significato" qui sarà riservato alla lingua; è il dizionario che tesaurizza il significato della parole, la cui prima proprietà è di essere sempre identico a se stesso (essendo puramente virtuale); in altri termini, il significato è ripetibile, come gli altri elementi della lingua.

(p. 66)

(T. Todorov, *Michail Bachtin: il principio dialogico*, 1990,
Torino, Einaudi)

STRUMENTO - OGGETTO - QUADRO

(Douady)

Durante la loro evoluzione e vita adulta i fenomeni matematici hanno vari statuti. Due di questi statuti, denominati *strumento* e sono implicati in modo forte e differenziato nell'analisi epistemologica di una nozione matematica, ed anche nello studio delle relazioni tra insegnamento e apprendimento. Il prenderli in considerazione può diventare un elemento di decisione per l'insegnante.

[...]

Noi diciamo che un concetto è uno **STRUMENTO** quando l'interesse è focalizzato sul suo uso per risolvere un problema.

Uno strumento è implicato in un contesto specifico, da qualcuno, in un tempo dato.

Un dato strumento può essere *adatto* a diversi problemi, diversi strumenti possono essere adatti ad un problema dato.

Uno strumento può essere implicito. È il caso di un concetto nel corso della sua elaborazione. Può capitare in vari modi: azioni risultanti da convinzioni intime non formulate, dichiarazioni senza giustificazione, utilizzi forse espliciti di tecniche e pratiche familiari che riguardano un concetto non ancora costruito.

Uno strumento può essere esplicito. Questo capita quando c'è un utilizzo di un elemento di conoscenza.

Il *significato* di un concetto è derivato dal contesto in cui esso è implicato. Così, esso riguarda lo statuto di strumento, esso è derivato anche dalle relazioni sviluppate nel contesto con altri concetti dello stesso (o di un altro) dominio matematico.[...]

Un concetto è un **OGGETTO** quando è considerato in una dimensione culturale, come un elemento di conoscenza indipendente da ogni contesto e da ogni persona, che ha un posto nel corpus del sapere scientifico socialmente riconosciuto. Un oggetto è definito matematicamente. Questo può accadere in vari modi: proprietà, costruzione effettiva, teorema di esistenza.

Lo statuto di oggetto permette la capitalizzazione e la strutturazione della conoscenza e l'estensione del corpus del sapere.

Lo scopo dell'apprendimento consiste nell'acquisizione del sapere nella sua doppia dimensione operativa e culturale.

Il **GIOCO DEI QUADRI** è un mezzo per ottenere diverse formulazioni di un problema.

[seguono la "definizione" di *quadro* ed un esempio di dialettica *strumento - oggetto* realizzata attraverso il *gioco dei quadri*]

(R. Douady, Tool, Object, Setting, Window:

Elements for Analysing and Construing Didactical Situations in Mathematics
in A. J. Bishop et al. (eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*,
Dordrecht: Kluwer Academic Publishers)

VOCE

(Bachtin)

Una enunciazione, parlata o scritta, è sempre espressa da un punto di vista [una voce], che per Bachtin è piuttosto un processo che una posizione fissa. L'enunciazione è attività che converte le differenze in valori. A un livello elementare, per esempio, le stesse parole possono significare cose differenti secondo la particolare intonazione con cui sono pronunciate in un contesto specifico: l'intonazione è il suono che il valore produce.

(p. 35, Clark K. & Holquist M.,
Michail Bachtin,
Bologna: il Mulino, 1991)

sulla POLIFONIA

L'essenza della polifonia sta nel fatto che le voci restano indipendenti e, come tali, si combinano in una unità di ordine superiore a quella dell'omofonia. Se si parla di volontà individuale, è proprio nella polifonia che avviene la combinazione di alcune volontà individuali e si compie il superamento di una sola volontà. Si può dire così: la volontà artistica della polifonia è la volontà che tende a unire molte volontà, la volontà che tende all'evento.

[...]

Va osservato che il nostro paragone tra il romanzo di Dostoevskij e la polifonia ha soltanto il significato di un'analogia figurata. L'immagine della polifonia e del contrappunto indica soltanto i nuovi problemi che sorgono quando la costruzione del romanzo esorbita dai limiti della consueta unità monologica, così come nella musica nuovi problemi si sono presentati quando si è andati oltre la singola voce. Ma i materiali della musica e del romanzo sono troppo differenti perché si possa parlare di qualcosa di più di una semplice analogia o metafora, questa metafora è però da noi trasformata nel termine 'romanzo polifonico' poiché non troviamo una espressione più adatta. Non dobbiamo tuttavia dimenticare l'origine metaforica del termine.

(p. 32-3)

[a proposito della comprensione da parte di Dostoevskij della *natura dialogica* del pensiero umano]

Dostoevskij ha saputo scoprire, vedere e mostrare la vera sfera della vita dell'idea. L'idea vive non nella coscienza individuale *isolata* dell'uomo: rimanendo solo in essa, essa degenera e muore. L'idea comincia a vivere, cioè a formarsi, a svilupparsi, a trovare e a rinnovare la sua espressione verbale, a generare nuove idee, solo entrando in reali rapporti dialogici con idee *altrui*. Il pensiero umano diventa vero pensiero, cioè idea, solo in condizioni di contatto vivo con un altro pensiero altrui, incarnato in una voce altrui, cioè in una altrui coscienza espressa nella parola. Nel punto di contatto di queste voci-coscienze nasce appunto e vive l'idea. [...] L'idea è un *fatto vivo*, che si crea nel punto di incontro dialogico di due o più coscienze.

(p. 115-6)

(M. Bachtin, Dostoevskij: poetica e stilistica,
Piccola Biblioteca Einaudi, 1968)

ZONA DI SVILUPPO PROSSIMALE # AREA DI SVILUPPO POTENZIALE

(Vygotskij)

L'apprendimento umano presuppone una natura sociale specifica e un processo attraverso il quale i bambini si inseriscono gradualmente nella vita intellettuale di coloro che li circondano.

La zona di sviluppo prossimale (o area di sviluppo potenziale) è la distanza tra il livello effettivo di sviluppo così come è determinato dal **problem - solving** autonomo e il livello di sviluppo potenziale così come è determinato attraverso il **problem - solving** sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci.

[...]

La zona di sviluppo prossimale definisce quelle funzioni che non sono ancora mature ma che sono nel processo di maturazione, funzioni che matureranno domani ma sono al momento in uno stadio embrionale, queste funzioni potrebbero essere chiamate i 'boccioli' o i 'fiori' dello sviluppo piuttosto che i 'frutti' dello sviluppo. Il livello reale di sviluppo caratterizza lo sviluppo mentale retrospettivamente, mentre la zona di sviluppo prossimale caratterizza prospettivamente lo sviluppo mentale.

[...]

Una comprensione totale del concetto di zona di sviluppo prossimale deve risultare dalla rivalutazione del ruolo dell'imitazione nell'apprendimento. Un dogma inconfutabile della psicologia classica è che l'attività indipendente dei bambini, non la loro attività d'imitazione, indica il loro livello di sviluppo mentale. Questo punto di vista è espresso in tutti gli odierni sistemi di test. Nel valutare lo sviluppo mentale, si prendono in considerazione solo quelle soluzioni ai problemi dei test che il bambino trova senza l'assistenza di altri, senza dimostrazioni e senza domande con la risposta implicita. L'imitazione e l'apprendimento sono considerati come processi puramente meccanici. Ma recentemente gli psicologi hanno dimostrato che una persona può imitare solo quello che è all'interno del suo livello di sviluppo. Per esempio, se un bambino sta incontrando delle difficoltà in un problema di aritmetica e l'insegnante lo risolve sulla lavagna, il bambino potrebbe afferrare la soluzione in un istante. Ma se l'insegnante dovesse risolvere un problema di matematica superiore, il bambino non potrebbe capire la soluzione non importa quante volte la imiti.

[...]

I bambini sanno imitare una varietà di azioni che vanno molto oltre i limiti delle loro capacità. Usando l'imitazione i bambini sono in grado di fare molto di più in una attività di gruppo o sotto la guida di adulti.

[...]

Noi proponiamo che una caratteristica essenziale dell'apprendimento è che esso crea la zona dello sviluppo prossimale; vale a dire, l'apprendimento risveglia una varietà di processi evolutivi interni capaci di operare solo quando il bambino sta interagendo con persone del suo ambiente e in cooperazione con i suoi compagni.

(L. S. Vygotskij, *Interazione tra apprendimento e sviluppo*, in *Il processo cognitivo*, Torino: Boringhieri, 1987, p. 127 e ss.)

La teoria dell'area di sviluppo potenziale dà luogo ad una formula che esattamente contraddice l'indirizzo tradizionale: *l'unico buon insegnamento è quello che precorre lo sviluppo.*

[...]

L'apprendimento non è di per se stesso sviluppo, ma una corretta organizzazione dell'apprendimento del bambino porta allo sviluppo mentale, attiva un intero gruppo di processi di sviluppo, e questa attivazione non potrebbe aver luogo senza l'apprendimento. L'apprendimento perciò è un momento intrinsecamente necessario ed universale per lo sviluppo nel bambino di quelle caratteristiche umane non naturali, ma formatesi storicamente...

[...]

Il processo di sviluppo non coincide con quello di apprendimento, il processo di sviluppo segue quello di apprendimento, che crea l'area di sviluppo potenziale.

[...]

- ⊕ Ogni materia scolastica ha una sua propria relazione con il corso dello sviluppo del bambino, relazione che muta con il passaggio del bambino da uno stadio all'altro. Ciò comporta il riesame dell'intero problema delle discipline formali, cioè del ruolo e dell'importanza delle singole materie nel successivo sviluppo psico-intellettuale del bambino. Tale questione non può essere schematizzata in una qualunque formula unica, ma permette piuttosto di capire quanto vasti siano gli obiettivi di una ricerca sperimentale estensiva e variata.

(L. S. Vygotskij, Apprendimento e sviluppo intellettuale
nell'età scolastica,
in *Lo sviluppo psichico del bambino*, pp. 81 e ss.
Editori Riuniti 1973).

Capitolo 4

Bibliografie

1. Pubblicazioni del progetto *Discussione Matematica*.

Bartolini Bussi M. (1989). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 12, n.1.

In questo articolo si presenta un primo quadro teorico provvisorio per la pianificazione e l'analisi della discussione matematica.

Bartolini Bussi M. (1989). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica: analisi di due casi, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 12, n.5

In questo articolo vengono discussi dettagliatamente due casi relativi al concetto di volume e al concetto di infinito.

Bartolini Bussi M., Evaluation of Teaching Sequences that Include Individual and Collective Activities: Two Case Studies, in Bazzini & Steiner (eds.) *Proceedings of the First Bilateral Symposium for the Furtherance of Scientific Exchange and Cooperation in Didactics of Mathematics*, C.N.R. 1989

In questo contributo i due esperimenti didattici sul volume e sull'infinito sono analizzati in relazione ai problemi della valutazione.

Bartolini Bussi M. (1991). Apprendere la matematica attraverso la discussione: i grafici nel piano cartesiano (prima e seconda parte), in *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 14 (1991), n.3

Bartolini Bussi M. (1991). Apprendere la matematica attraverso la discussione: i grafici nel piano cartesiano (terza parte), in *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 14, n.5.

Nel primo articolo si presenta una prima revisione del quadro di riferimento, con un estensivo riferimento a Vygotskij; nel secondo si analizza dettagliatamente un esperimento sui grafici cartesiani in quinta elementare.

Bartolini Bussi M. (1991). Social Interaction and Mathematical Knowledge, in Furinghetti F. (ed.) *Proceedings of the 15th International Conference for the*

Psychology of mathematics Education, , vol. 1, pp. 1-16, The Program Committee of the 15th Pme Conference, Assisi 1991.

Questo contributo si riferisce alla conferenza plenaria tenuta su invito dall'autrice in occasione del 15° Congresso internazionale Psychology of Mathematics Education (assisi 1991). Sono discusse le principali tendenze della ricerca sull'interazione sociale nella letteratura internazionale sulla didattica della matematica. Il progetto sulla discussione matematica è inquadrato rispetto alla letteratura internazionale. Viene presentato un brevissimo segmento dell'esperimento sul coordinamento dei punti di vista.

Bartolini Bussi M. (1992), Mathematics Knowledge as a Collective Enterprise, in Seeger and Steinbring (eds.), *The Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor*, pp.121-151, Materialien und Studien Band 38, IDM Bielefeld.

Questo contributo si riferisce all'intervento tenuto su invito dall'autrice in occasione del 4° incontro del gruppo internazionale SCTP (Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education) svolto a Brakel nel 1992. In esso si analizza l'intero progetto sulla discussione matematica, con particolare riferimento all'esperimento sui grafici cartesiani

Bartolini Bussi M., Barberini Emilia G. (1993), A proposito di trasformazioni geometriche nella scuola elementare (I parte), *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 16, n. 7, 643-662.

Bartolini Bussi M., Barberini Emilia G. (1993), A proposito di trasformazioni geometriche nella scuola elementare (II parte), *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 16, n. 9 787-820.

Questi due articoli, redatti indipendentemente dal progetto discussione matematica, sono qui riportati in quanto contengono una analisi epistemologica e didattica delle trasformazioni geometriche nella scuola elementare. Essi costituiscono la base del lavoro successivo sulla discussione matematica in geometria.

Bartolini Bussi M. (1993), Tre esperienze in chiave costruttivista, *Scuolaviva*, vol. 29, n.2, pp.28-31.

Questo articolo è una introduzione ad articoli diversi di F. Ferri (scuola elementare), R. Garuti (scuola media) e C. Zanoli (scuola superiore).

Ferri F. (1993), Rappresentazione del mondo visibile, *Scuolaviva*, vol. 29, n. 2, pp 32-35

Questo articolo contiene la presentazione di un segmento del percorso sulla rappresentazione del mondo visibile.

Ferri F. (1993) "Perspective is a Solvable Problem" or "To Be Born Five Hundred Years Before", in Milan H. & Novotna J. (eds.), *Proceedings of the SEMT 93 (International Symposium on Elementary Math Teaching)*, 33-35, Praha: Charles University Publ.

Questo contributo discute alcuni dati dall'esperimento sulla rappresentazione del mondo visibile, che mostrano l'efficacia dell'introduzione di fonti storiche originali nelle classi di scuola elementare.

Bartolini Bussi M. (1994), *Theoretical and Empirical Approaches To Classroom Interaction*, in Biehler, Scholz, Strasser & Winckelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers, 121-132, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Questo contributo, su invito, introduce alcuni articoli sull'interazione sociale nella didattica della matematica, scritti da specialisti del settore ben noti a livello internazionale. Nell'articolo è sviluppato il confronto tra i quadri di riferimento di ispirazione Piagetiana e quelli di ispirazione Vygotskiana. Il volume è uno dei fondamentali riferimenti internazionali sulla didattica della matematica.

Bartolini Bussi M. (1994), *On socio-cultural Theory and Psychology of Mathematics Education*, PMENEWS (May 1994), 7-9.

Questo breve contributo su richiesta sottolinea l'importanza di una lettura critica dei lavori di Vygotskij per il contributo che questi possono offrire alla Psicologia dell'Educazione Matematica.

Bartolini Bussi M. (1994), *Il ruolo della discussione e dell'argomentazione nella costruzione delle conoscenze matematiche*, in Atti del convegno su *La costruzione della conoscenza matematica nella scuola media* (Verona, 1993), 63-78, Torino: Società Editrice Internazionale.

Questo contributo raccoglie la conferenza e la partecipazione alla tavola rotonda del convegno citato. Vengono presentati e discussi in modo operativo i principali risultati della ricerca sulla discussione matematica. Essi vengono poi confrontati con i risultati di altri approcci documentati nella letteratura internazionale.

Bartolini Bussi M. (1994), *The Mathematical Discussion in Primary School Project: analysis of long term processes*, in Bazzini L. & Steiner H. G. (eds.) *Proceedings of the Second Italian-German bilateral Symposium on Didactics of Mathematics (Osnabrueck 1992)*, Materialien und Studien band 39, IDM, University of Bielefeld.

Questo contributo contiene l'analisi di un segmento dell'esperimento sulla rappresentazione del mondo visibile.

Bartolini Bussi M. & Boni M. (1995), *Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano*, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 18, 221-256.

Questo articolo presenta in modo dettagliato l'analisi fine dell'interazione nel corso di una discussione di concettualizzazione relativa alla questione *che cosa vuol dire punto di vista?* L'articolo contiene una breve sintesi del quadro di riferimento e l'analisi fine di una intera discussione. Segue l'articolo un commento di P. Boero che suggerisce analisi complementari della stessa discussione, legate a motivi diversi dell'attività.

Bartolini Bussi M. (1995), *Tony and Dennis: Analysis of Classroom Interaction Discourse*, in *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Recife (Brazil): the International Committee of PME*.

Questo contributo contiene l'analisi da un punto di vista Vygotskiano di alcuni episodi di interazione videoregistrati presso il TERC di Cambridge (Massachusetts). Tale analisi è stata preparata su richiesta come parte della tavola rotonda plenaria del Congresso PME di Recife.

in stampa:

Bartolini Bussi M. (in stampa), *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Modena: Centro Documentazione Educativa del Comune di Modena.

Volume introduttivo alle problematiche, al quadro di riferimento ed ai risultati della ricerca sulla discussione matematica (questo volume).

Costa C. Ferri F. & Garuti R. (in stampa), *Perspective Drawing as a Semiotic Tool Towards the Statements of Geometry for Young Pupils (grades 3-6)*, Proceedings of the 46th CIAEM (Tolosa 1994).

Sono qui pubblicati due contributi (presentazione e atelier) sul segmento dell'esperimento sulla rappresentazione del mondo visibile relativo all'avvio alla dimostrazione. Viene presentata una metodologia di analisi dei protocolli individuali che è poi applicata al complesso dei dati raccolti.

Bartolini Bussi M. (in stampa), *Social Interaction and Mathematical Knowledge: Foreword*, *The Journal of Mathematical Behavior*.

In questo contributo l'autrice introduce, come 'guest editor', un numero speciale della rivista americana contenente una serie di articoli sull'interazione sociale, scritti da noti specialisti del settore.

Bartolini Bussi M. (in stampa), *Coordination of Spatial Perspectives: An Illustrative Example of Internalization of Strategies in Real Life Drawing*, in stampa su *The Journal of Mathematical Behavior*.

Questo articolo contiene una analisi dell'esperimento sul coordinamento dei punti di vista, basata sul costrutto Vygotskiano di interiorizzazione.

Arzarello F. & Bartolini Bussi M. (in stampa), *Italian Trends of Research in Mathematics Education: a National Case Study in the International Perspective*, in Sierpinska A. & Kilpatrick J. (eds.), *What is research in Mathematics Education?*, Kluwer Academic Press.

Questo contributo inquadra la ricerca italiana sulla didattica della matematica (ed in particolare il progetto di ricerca sulla discussione matematica) nel quadro internazionale. Esso verrà pubblicato nel volume risultante dall'ICMI Study di Washington (1994).

Bartolini Bussi M. (in stampa), *Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School*.

Questo articolo contiene una trattazione dettagliata del quadro di riferimento del progetto sulla discussione matematica e una analisi dell'esperimento sulla rappresentazione del mondo visibile centrata sul costrutto Vygotskiano di mediazione semiotica.

Bartolini Bussi M., (in stampa), Joint Activity in the Mathematics Classroom: a Vygotskian Analysis, in Seeger F., Voigt J. & Waschescio U. (eds.), The Culture of the Mathematics Classroom. Analyses and Changes, Cambridge University Press.

In questo contributo si presenta l'analisi dell'attività collettiva nella classe da un punto di vista Vygotskiano e si discute la funzione del contesto nella caratterizzazione dell'attività. Sono presi in esame tre contesti particolari: le ombre solari, l'antropometria, la rappresentazione del mondo visibile.

Bartolini Bussi M. (in stampa), Geometry in Context: from Pre-primary School to High School and Beyond, ICMI Study: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century (Catania 1995).

Questo contributo allo studio ICMI analizza tre diversi contesti per l'insegnamento della geometria e costruisce attraverso essi un ideale percorso epistemologico nella disciplina. I tre contesti sono: il banco del falegname nella scuola dell'infanzia; la rappresentazione del mondo visibile nella scuola elementare e media inferiore; le macchine matematiche nella scuola media superiore.

in preparazione

Ferri F., La scuola a Modena: Matematica.

Questo volumetto conterrà il rendiconto dettagliato di alcune esperienze sviluppate nella provincia di Modena, che costituiscono esempi significativi di innovazione.

Bartolini Bussi M., Sierpinska A., Steinbring H. (eds.), Introduction to the volume Language and Communication in the Mathematics Classroom, Reston VA: NCTM.

Questo lavoro è l'introduzione ad una collezione di testi già presentati da specialisti del settore in occasione dell'ICME 7 di Quebec, Canada. Il volume è stato accettato per la pubblicazione dal National Council of Teachers of Mathematics (USA). La revisione sulla base dei pareri dei recensori è attualmente in corso.

Bartolini Bussi M., Verbal interaction in Mathematics Classrooms: a Vygotskian Analysis, in Bartolini Bussi M., Sierpinska A., Steinbring H. (eds.), Language and Communication in the Mathematics Classroom, Reston VA: NCTM.

Questo lavoro è uno dei contributi del volume citato. In esso si discute il significato di una analisi di tipo Vygotskiano per lo studio dell'interazione sociale nel processo di insegnamento - apprendimento. È riportata l'analisi di una intera discussione dall'esperimento sul coordinamento dei punti di vista.

2. Bibliografia generale.

Oltre alle pubblicazioni del progetto sono stati citati i seguenti lavori:

Arsac G., Germain G. & Mante M. (1988), *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.

Arsac G. Chapiro G., Colonna A., Germain G., Guichard Y. & Mante M. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Lyon: Presses Universitaires.

Bachelard G. (1975), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris: VRIN.

Bachtin M. (1979), *Estetica e romanzo: un contributo fondamentale alla 'scienza della letteratura'*, Torino: Einaudi.

Bachtin M. (1968), *Dostoevskij: poetica e stilistica*, Torino: Einaudi.

Bachtin M. (1988), *L'autore e l'eroe: Teoria letteraria e scienze umane*, Torino: Einaudi.

Balacheff N. (1991), *The benefits and Limits of Social Interaction: the case of Mathematical Proof*, in Bishop A. J. & al. (eds.), *Mathematical Knowledge: its Growth Through Teaching*, 175-192, Kluwer Academic Publishers.

Berthelot R. Salin M. H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Université Bordeaux I.

Boero P. (1989), *Semantic Fields Suggested by History*, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 21 (4), 128-132.

Boero P. (1992), *The Crucial Role of Semantic Fields in the Development of Problem Solving Skills in the School Environment*, in Ponte J. P., Matos J. F., Matos J. M. & Fernandes D. (eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, 77-91, Springer-Verlag.

Clark K. & Holquist M. (1991), *Michail Bachtin*, Bologna: il Mulino, 1991)

Davydov V. V. (1979), *Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento: problemi logico-psicologici delle discipline scolastiche*, Firenze: Giunti Barbèra.

Doise W. & Mugny G. (1981), *Lo sviluppo sociale dell'intelligenza*, Bologna: Il Mulino.

Douady R. (1991), *Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics*, in Bishop A. J. et al. (eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duroux A. (1983), *Le valeur absolue*, *Petit x*, n. 3.

Edwards D. & Mercer N. (1987), *Common knowledge: the development of Understanding in the Classroom*, London: Routledge.

Ferreri M. & Spagnolo F. (1994), L'apprendimento tra emozione e ostacolo. Quaderni di ricerca didattica n. 4. Palermo: G.R.I.M.

Fischbein E, Tirosh D. & Hess P. (1979), The intuition of infinity. Educational Studies in Mathematics, vol. 10, 3-40.

Laborde C. (1991). Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques, in Garnier C., Bednarz N. & Ulanovskaya I. (eds), Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Ecoles russe et occidentale, 29-50. Bruxelles: De Boeck-Wesmael

Legrand M. (1988), Genese et etude sommaire d'une situation co-didactique: le debat scientifique en situation d'enseignement, in Laborde C. (ed.), Actes du Premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique, Grenoble: la pensee sauvage

Leont'ev A. N. (1976), Problemi dello sviluppo psichico, Roma: Editori Riuniti.

Leont'ev A. N. (1977), Attività, coscienza, personalità. Firenze: Giunti Barbèra.

Lotman J. M. & Uspenskij B. A. (1980), Il ruolo dei modelli duali nella dinamica della cultura russa. in D'Arco (a cura di), La cultura nella tradizione russa del XIX e XX secolo, Torino: Einaudi.

Lumbelli L. (1990a), Un approccio alla valutazione formativa: per una metodologia dell'interrogazione orale. Scuola e Città, XLI (1), 8 - 18.

Lumbelli L. (1990b), Per una fenomenologia di atti linguistici congruenti con l'intenzione di saperne di più. Scuola e Città, XLI (2), 67 - 78.

Mariotti M. A. (1995). Discutendo in classe la definizione di prisma. in corso di stampa su L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, vol. 18.

Mecacci L. (1983). Vygotskij: Antologia di scritti, Bologna: Il Mulino.

Panofsky E. (1961), La prospettiva come forma simbolica, Milano: Feltrinelli

Piaget J. & Inhelder B. (19). La rappresentazione dello spazio nel bambino, Giunti Barbèra.

Piero della Francesca (1460), De Prospectiva Pingendi (edizione critica di G. Nicco Fasola, 1942, Firenze: Sansoni).

Pimm D. (1987), Speaking Maathematically: Communication in Mathematics Classrooms. Londra: Routledge & Keagan.

Pirie S. E. B. & Schwarzenberger L. E. (1988), Mathematical Discussion and Mathematical Understanding, Educational Studies in Mathematics, 19. 459-470.

Pontecorvo C., Ajello A. M. & Zucchermaglio C. (1991), Discutendo si impara. Interazione sociale e conoscenza a scuola, Firenze: IA nUOVA ITALIA sCIENTIFICA.

Raymond P. (1979). La storia e le scienze, Roma: Editori Riuniti.

Richards J. (1991), *Mathematical discussions*, in von Glasersfeld E. (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 13-51, Kluwer Academic Publishers.

Rossi P. (1977), *I filosofi e le macchine*, Feltrinelli.

Schoenfeld A. H., Gamoran M., Kessel C. & Leonard M. (1992), *Toward a Comprehensive model of Human Tutoring in Complex Subject Matter Domains*, *The Journal of Mathematical Behaviour*, 11 (293-320)

Tall D. & Vinner S. (1981), *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*, *Educational studies in Mathematics*, vol. 12.

Todorov T. (1990), *Michail Bachtin: il principio dialogico*, Torino: Einaudi.

Vergnaud G. (ed), (1983), *Didactique et acquisition du concept de volume*, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, vol. 4, n. 1.

Voigt J. (1995), *Patterns and Routines in Classroom Interaction*, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 6(1), 69-118.

Vygotskij L. S. (1972), *Immaginazione e creatività nell'età infantile*, Editori Riuniti.

Vygotskij L. S. (1974), *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*, Firenze: Giunti Barbèra.

Vygotskij L. S. (1987), *Il processo cognitivo*, Torino: Boringhieri.

Vygotskij L.S. (1992): *Pensiero e Linguaggio*, edizione critica di L. Mecacci, Bari: Laterza.

Vygotskij L. S. (1993), *Lo sviluppo psichico del bambino*, Editori Riuniti.

Wertsch J. V. (1991), *Voices of the Mind: a Sociocultural Approach to Mediated Action*, Harvester Wheatsheaf.